

## GEOMETRİK OPTİMALLEŞTİRME PROBLEMLERİ ÜZERİNE II

Gabil Adilov-Ramazan Tınaztepe

gabil@pascal.sci.akdeniz.edu.tr-rtinaztepe@yahoo.com

Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, ANTALYA

**3. BAZI EŞİTSİZLİKLER VE OPTİMALLEŞTİRME PROBLEMİNDE ROLÜ:** Birçok optimalleştirme problemleri belli eşitsizlikler yardımıyla daha kolay çözülebilir. Meşhur eşitsizliklerden birkaç tanesini hatırlatalım.  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  pozitif reel sayıları için;

$$\text{Aritmetik ortalama} \quad A(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

$$\text{Geometrik ortalama} \quad G(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n}$$

$$\text{Harmonik ortalama} \quad H(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

olarak tanımlanır. Bu ortalamalar arasında aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$A(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \geq G(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \geq H(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (1)$$

Burada eşitlik durumu ancak  $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$  durumunda olur. Yukarıdaki eşitsizliklerin daha genel bir halini verelim. Bunun için  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  pozitif reel sayılar olmak üzere  $k$  dereceden ortalama fonksiyonunu tanımlayalım:

$$M_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \sqrt[k]{\frac{x_1^k + x_2^k + x_3^k + \dots + x_n^k}{n}}$$

Bu fonksiyonda  $k = 1$ , için

$M_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = A(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  ve  $k = -1$  seçilirse  $M_{-1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = H(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  olacağı açıktır. Bununla birlikte aşağıdaki eşitlikler de kolayca gösterilebilir:

$$M_0(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \lim_{k \rightarrow 0} M_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = G(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n);$$

$$M_\infty(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} M_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \max\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\};$$

$$M_{-\infty}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \lim_{k \rightarrow -\infty} M_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \min\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}.$$

Yukarıda tanımlanan  $M_k$  fonksiyonu  $k$  parametresine göre monoton artan bir fonksiyondur. Dolayısıyla  $k > l$  olduğunda

$$M_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \geq M_l(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (2)$$

olur ve eşitlik ancak  $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$  durumunda olabilir. Görüldüğü gibi (2) eşitsizliği (3) eşitsizliğinin özel halidir.

Cauchy-Schwartz Eşitsizliği:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in R$  ve  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n \in R$  için

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği sağlanır ve eşitlik sadece  $x_i = \lambda y_i$  ( $i = 1, n$ ) olması durumunda geçerlidir. Bu eşitsizlikler yardımıyla çözülebilecek optimalleştirme problemlerine örnekler verelim.

**Örnek 1:**  $x > 0, y > 0, z > 0$  olmak üzere  $\frac{x^3 y^2 z}{x^6 + y^6 + z^6}$  ifadesinin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

**Çözüm:**  $x$  ve  $y$ 'yi  $x = \sqrt[3]{3}t$ ,  $y = \sqrt[3]{2}s$  şeklinde değiştirelim. Bu durumda  $\frac{x^3 y^2 z}{x^6 + y^6 + z^6} = \frac{\sqrt{3} \sqrt[3]{2} t^3 s^2 z}{3t^6 + 2s^6 + z^6} = \frac{\sqrt{3} \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{t^3 s^2 z}}{\sqrt[3]{3t^6 + 2s^6 + z^6}}$  olur. Sonuncu terime Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğini uygularsak;  $\frac{x^3 y^2 z}{x^6 + y^6 + z^6} \leq \frac{\sqrt{3} \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3+2+1}}$  buluruz. Burada eşitlik durumu  $s = t = z$  durumunda vardır. Dolayısıyla, değişkenler  $x = \sqrt{3}\lambda$ ,  $y = \sqrt{2}\lambda$ ,  $z = \lambda$  değerinde iken, verilen ifade maksimum olan  $\frac{\sqrt{3} \sqrt[3]{2}}{6}$  değerine ulaşır (burada  $\lambda$  pozitif reel sayı değerli bir parametredir).

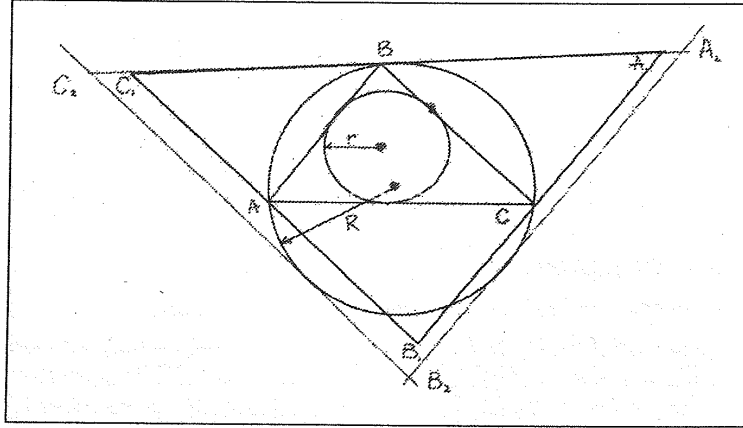
**Örnek 2:**  $a, b, c$  verilmiş reel sayılar olmak üzere  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$  yuvarında  $ax + by + cz$  ifadesinin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

**Çözüm:** Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden:  $ax + by + cz \leq 10\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  olur. Eşitlik durumu:  $x = \lambda a, y = \lambda b, z = \lambda c \Rightarrow \lambda = \frac{10}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ . Böylece  $x = \frac{10a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, y = \frac{10b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, z = \frac{10c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$  ve  $\max(ax + by + cz) = 10\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  bulunur. Özel halde  $a = 1, b = 4, c = 8$  olursa,  $x = \frac{10}{9}, y = \frac{40}{9}, z = \frac{80}{9}$  ve  $\max(x + 4y + 8z) = 90$  olur.

Geometrik optimalleştirme problemlerinin incelenmesinde bu anlamda yararlı olabilecek birkaç önemli geometrik eşitsizliği verelim. Bu eşitsizlikler üçgenler ve dörtüzlülerle ilgilidir. Bununla birlikte, birçok eşitsizliği konveks çokgenler ve çokyüzlüler için de uygun biçimde genelleştirmek mümkündür.

Önce, kullanılacak işaretlemeleri gösterelim. Bir  $ABC$  üçgeninde  $A, B, C$  bu üçgenin köşelerini;  $a, b, c$  kenarlarını,  $h_a, h_b, h_c$  yüksekliklerini,  $m_a, m_b, m_c$  kenarortaylarını,  $l_a, l_b, l_c$  açıortaylarını,  $R$  çevrel çemberin yarıçapını,  $r$  iç teğet çemberin yarıçapını,  $R_a, R_b, R_c$  sırasıyla üçgen içindeki bir noktadan  $A, B, C$  köşelerine olan uzaklığı,  $d_a, d_b, d_c$  sırasıyla üçgen içindeki bir noktadan  $a, b, c$  kenarlarına olan uzaklığı,  $S$  üçgenin alanını,  $2p$  üçgenin çevresini gösterebiliriz.

**Eşitsizlik 1.** Her üçgen için  $R \geq 2r$  eşitsizliği sağlanır ve eşitlik durumu sadece eşkenar üçgenler için geçerlidir.



Şekil 4

**Kanıt:**  $ABC$  üçgeninin iç teğet ve çevrel çemberlerini çizelim. Köşe noktalarından geçip, karşı kenara paralel olan  $A_1B_1C_1$  üçgeni  $ABC$  üçgenine benzer olur:  $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$  ve  $2|AB| = |A_1B_1|$ ;  $2|AC| = |A_1C_1|$ ;  $2|BC| = |B_1C_1|$

Kenarları çevrel çembere teğet olup,  $A_1B_1C_1$  üçgeninin kenarlarına paralel olan  $A_2B_2C_2$  üçgeni de  $ABC$ 'ye benzer olur:  $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta ABC$  ve  $|A_2B_2| \geq |A_1B_1|$ ;  $|A_2C_2| \geq |A_1C_1|$ ;  $|B_2C_2| \geq |B_1C_1|$ . Küçük çember  $ABC$  üçgenine iç teğet, büyük çember  $A_2B_2C_2$  üçgenine iç teğet  $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta ABC$  ve  $|A_2B_2| \geq |A_1B_1| = 2|AB|$  olduğundan  $R \geq 2r$  olur.

Eşitlik durumu:  $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_2B_2C_2$  olduğunda olur. Başka bir deyişle  $ABC$  üçgeninin çevrel çemberi  $A_1B_1C_1$  üçgenine iç teğet olduğunda olur. Kolayca görülür ki, bu durumda  $\Delta ABC$  eşkenar üçgendir.

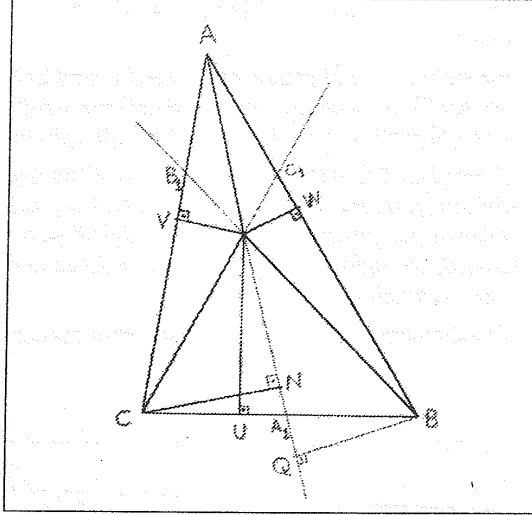
**Eşitsizlik 2.** Verilmiş bir  $ABC$  üçgeninin içindeki her  $M$  noktası için aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur:

(a)  $R_a R_b R_c \geq 8d_a d_b d_c$ ;

(b)  $R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c)$ ;

$$(c) \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} \right).$$

Yukarıdaki ifadelerde eşitlik durumu ancak eşkenar üçgenler ve  $M$  merkez nokta kabul edildiğinde ortaya çıkar.



Şekil 5

**Kanıt:** a) ŞEKİL 5  $BQ \perp AM$  ve  $CN \perp AM$  dir. Kolayca görüldüğü gibi  $|BC| = |BA_1| + |A_1C| \geq |BQ| + |NC|$ . Dolayısıyla,

$$aR_a = |BC| \cdot |AM| \geq (|BQ| + |CN|) \cdot |AM| = 2S_{\Delta AMB} + S_{\Delta AMC} = cd_c + bd_b \text{ olur.}$$

Benzer şekilde  $bR_b \geq ad_a + cd_c$  ve  $cR_c \geq ad_a + bd_b$  olduğu gösterilebilir.

Üç eşitsizliği art arda çarparsak;  $aR_a bR_b cR_c \geq (cd_c + bd_b)(ad_a + cd_c)(ad_a + bd_b)$  elde edilir. Diğer yandan  $cd_c + bd_b - 2\sqrt{cd_c \cdot bd_b} = (\sqrt{cd_c} - \sqrt{bd_b})^2 \geq 0 \Rightarrow cd_c + bd_b \geq 2\sqrt{cd_c \cdot bd_b}$  olur. Benzer şekilde  $ad_a + cd_c \geq 2\sqrt{ad_a \cdot cd_c}$  ve  $ad_a + bd_b \geq 2\sqrt{ad_a \cdot bd_b}$ . Sonuçta  $aR_a bR_b cR_c \geq 8abcd_a d_b d_c$  bulunur, dolayısıyla  $R_a R_b R_c \geq 8d_a d_b d_c$  olur.

Eşitlik durumu:  $|BC| = |BA_1| + |A_1C| = |BQ| + |CN| \Leftrightarrow BC \perp AM$  olmalı; benzer şekilde  $BM \perp AC$ ;  $CM \perp AB \Leftrightarrow M$  noktası yüksekliklerin kesişim noktasıdır (ortameres). Diğer yandan  $ad_a = bd_b = cd_c \Leftrightarrow S_{\Delta AMB} = S_{\Delta MAC} = S_{\Delta MBC} \Leftrightarrow M$  noktası kenarortayların kesişim noktası olmalıdır. Buna göre  $ABC$  üçgeni eşkenar,  $M$  ise merkez noktasıdır.

b) Şekil 6  $A, W, M, V$  noktalarından geçen bir çember çizelim. ( $MV \perp AC$  ve  $MW \perp AB$  olduğundan bu çember çizilebilir.) Bu çemberin yarıçapı  $R_a/2$  olur. Sinüs teoreminden  $VW = R_a \sin A$  olur.  $U_1 U_2$  parçası  $VW$ 'nin  $BC$  üzerinde izdüşümüdür:  $prVW = prd_b + prd_c$ . Bu ise  $U_1 U_2 = d_b \sin C + d_c \sin B$ 'dir, buradan  $R_a \sin A \geq d_b \sin C + d_c \sin B \Leftrightarrow R_a \geq d_b \frac{\sin C}{\sin A} + d_c \frac{\sin B}{\sin A}$  olur. Benzer şekilde:

$$R_b \geq d_a \frac{\sin C}{\sin B} + d_c \frac{\sin A}{\sin B}$$

$$R_c \geq d_a \frac{\sin B}{\sin C} + d_b \frac{\sin A}{\sin C}$$

Bu üç eşitsizliği art arda toplarsak ve her  $a > 0$  için  $a + \frac{1}{a} \geq 2$  olduğuna dikkat edersek (burada eşitlik durumu  $a = \frac{1}{a} = 1$  dir) :  $R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c)$

Eşitlik durumu: İlk önce  $\frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin B} = 2$  olmalıdır. Bu durumda  $\sin B = \sin C$  olur, böylece  $B = C$  bulunur. Benzer şekilde  $A = B$ 'dir, dolayısıyla üçgen eşkenar olmalıdır. Diğer yandan;  $VW = U_1 U_2$  olmalıdır. Bu durumda  $WV \parallel BC$ , olur. Benzer şekilde  $UW \parallel AC$  ve  $UV \parallel AB$  olur.

