

Şekil 7

**ALİŞTIRMALAR**

E 1. Her ABC üçgeni için aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur.

(i)  $9r \leq h_a + h_b + h_c \leq m_a + m_b + m_c \leq l_a + l_b + l_c \leq \frac{9}{2}R$

(ii)  $m_a + m_b + m_c \leq p\sqrt{3} \leq r + 4R$

(iii)  $27r^2 \leq h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \leq m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq p^2 \leq l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \leq \frac{27}{4}R^2$

(iv)  $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \geq \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \geq \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \geq \frac{2}{R}$

(v)  $2r \leq \frac{2}{3}\sqrt{\sqrt{3}S} \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}p \leq R$

(vi)  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$

(vii)  $\min\{h_a, h_b, h_c\} \leq d_a + d_b + d_c \leq \max\{h_a, h_b, h_c\}$

(viii)  $d_a d_b d_c \leq \frac{8S^3}{27abc}$

(ix)  $d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 \geq \frac{12r^4}{R^2}$

(x)  $aR_a + bR_b + cR_c \geq 2(ad_a + bd_b + cd_c)$

(xi)  $R_a R_b R_c \geq (d_a + d_b)(d_b + d_c)(d_a + d_c)$

Bu eşitsizliklerde eşitlik durumunu inceleyiniz.

Şimdi de dört yüzlüler için geçerli olan birkaç özelliği veriyoruz.

E 2. Her dört yüzlü için aşağıdaki özelliklerin doğru olduğunu ispat ediniz ve eşitlik durumunu inceleyiniz.

(i)  $R \geq 3r$

(ii)  $V \leq \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3$

(iii)  $\Delta \geq 6\sqrt[3]{\sqrt{3}V^2}$

(iv)  $\Pi \geq 3\sqrt{2}\sqrt[3]{3V}$

(v)  $\Pi^2 \geq 3\sqrt{3}\Delta$

$$(vi) R \geq \frac{\sqrt{2\sqrt{3}\Delta}}{4}$$

$$(vii) R \geq \frac{\sqrt{6\Pi}}{12}$$

Burada  $R$ , dörtyüzlünün çevrel küresinin yarıçapını,  $r$  içteğet küresinin yarıçapını,  $V, \Delta, 2\Pi$  ise sırasıyla dörtyüzlünün hacmini, yüzey alanını ve çevresini (kenarları toplamını) ifade etmektedir.

**E 3.** Her  $ABCD$  dörtyüzlüsü içinde verilen bir  $M$  noktası için  $R_a R_b R_c R_d \geq 81d_a d_b d_c d_d$  veya  $G(R_a, R_b, R_c, R_d) \geq 3G(d_a, d_b, d_c, d_d)$  olur. Eşitlik durumunu da size bırakıyoruz.

Burada  $R_a, R_b, R_c, R_d$  sırasıyla dörtyüzlünün içinde verilmiş bir noktanın A, B, C, D köşelerine olan uzaklığı,  $d_a, d_b, d_c, d_d$  ise noktanın sırasıyla A, B, C, D köşelerinin karşısındaki yüzlere olan uzaklığıdır.

**Not 4.** Sonuncu özellik Eşitsizlik 2(a)'nın dörtyüzlüler için genelleşmesidir. Sonraki iki eşitsizlik için böyle bir genelleşme sözkonusu değildir. Başka bir deyişle  $A(R_a, R_b, R_c, R_d) \geq 3A(d_a, d_b, d_c, d_d)$  ve  $H(R_a, R_b, R_c, R_d) \geq 3H(d_a, d_b, d_c, d_d)$  eşitsizlikleri her zaman sağlanmayabilir.

#### KAYNAKLAR

[1] D.O. Schliarski, N.N. Chentsov, İ.M. Yaglom, Geometriçeski nera venstra i zadaçi na maksimum i minimum. Nauka, Moskova, 1970.

## CATALAN SAYILARI ÜZERİNE

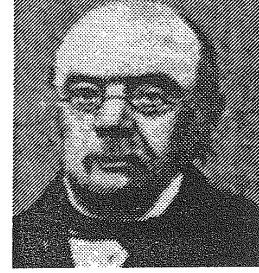
Ünal Ufuktepe

İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü

### 1. Giriş

Kombinatörler matematiğin sayma, sıralama ve düzenleme problemleriyle ilgili bir dalıdır. Uygulama alanları çok geniştir. Moleküler biyolog bir kromozom üzerinde genlerin kaç farklı şekilde sıralanabildiğini hesaplamaya çalışırken, bilgisayar mühendisi sıra önceliklerini tespit etmeye, psikolog öğrenme yollarını modellemeye uğraşır.

Bu tür kaygıların hiç birini taşımayan kumarcı ise poker oyununda eline fuluşun gelip gelmeyeceğini düşünür. Benzer şekilde mily-onlarca kişi her Cumartesi akşamı sayısal loto'da altıyı tutturup tutturamayacağını düşler.



Bu yazıda amaçlanan kombinatörlerin konularından birisi olan Catalan Sayıları ve bu sayıların uygulama alanlarına yer vermektir. Eugene Catalan bundan tam 167 yıl önce Belçika'da Ecole Polytechnique de Liouville'nin öğrencisiyken bu sayıları keşfetmiştir (1835). Catalan  $n + 2$  kenarlı düzgün bir çokgenin  $n$  üçgene kaç farklı yolla bölünebileceğini hesaplamaya çalışırken bu sayıları bulmuştur. Aslında Catalan sayılarını ilk keşfeden Johann Segner (1758) olmasına karşın onun ispatları E. Catalan'ın ispatları kadar kesin ve net olmadığından bu sayıların isim babası E. Catalan olmuştur. Catalan bu yönde şanslı olmasına karşın kariyer yapma konusunda pek şanslı değildi. E. Catalan bugünün deyimiyle aşırı sol görüşlüydü. Onun bu politik tercihi o günün Belçika hükümetince pek hoş karşılanmamış ve akademik kariyeri engellenmiştir. Politik baskılar E. Catalan'ı akademik kurumlarda sitediği yerlere gelmesini engellemiş olmasına karşın Catalan sayılarının bilime mal olmasını hiç bir güç engellememiştir.

### 2. Catalan sayıları

Litaretürde Catalan sayıları üzerine bir çok tanım vardır:

1.  $n + 2$  kenarlı düzgün bir çokgen  $n$  üçgene kaç farklı yolla bölünebilir?
2.  $n$  çift parantez ( yani  $n$  tane soldan açılan ve  $n$  tane sağdan kapanan parantez) kaç farklı yolla düzenlenebilir?
3.  $n$  bağlantı noktası olan bir ağaç dallı çizge grafik (binary tree) kaç farklı şekilde çizilebilir?
4. Bir şehirdeki sokakların haritası  $n \times n$  boyutlu bir satranç tahtası görünümünde olsun. Bu şehrin bir köşesinden yola çıkıp karşı köşeye ana köşegeninin üstüne (veya altına) çıkmaksızın kaç farklı yolla gidilebilir?

Bütün bu problemlerin çözümü  $\{C_n\} = \{1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, \dots\}$  tam sayılar dizisinin elemanlarından biridir. Bu elemanlara Catalan sayıları denir. Mathematica paket programı ile bu dizinin elemanlarından birini aşağıdaki komutlarla elde edebilirsiniz.

<< DiscreteMath' (Paket programı ile kombinatörlere dair fonksiyonlar belleğe yüklenir) CatalanNumber[10] (10. Catalan Sayısı elde edilir.).

2. nolu probleme baktığımızda bir çift parantez tek bir yolla düzenlenebilir; (). Yani  $C_1 = 1$ . Eğer iki çift parantezimiz olsaydı bu iki parantezi iki farklı şekilde düzenleyebilirdik; ( ) ( ) ve ( ( ) ), yani  $C_2 = 2$ . Eğer üç çift parantezimiz olsaydı bunları; ( ( ( ) ), ( ( ) ( ) ), ( ( ) ( ) ( ) ) ve ( ( ( ) ) ) şeklinde düzenleyebilirdik, yani  $C_3 = 5$ . Bu durumu  $n$  çift parantez için nasıl genelleştirebiliriz?

### 3. Genelleştirme

$n$  çift parantezin (yani  $n$  tane sol,  $n$  tane de sağ parantezin) düzenlenmesinde eğer her bir sol paranteze karşılık sağ bir kapanış varsa bu düzenlemeye **iyi düzenli**, diğer durumlara ise **bozuk düzenli** denir. Farklı iyi düzenleme sayısına da  $n$ . Catalan sayısı denir. Catalan sayıları arasındaki bağıntı şu şekilde tanımlanır [6];

$$C_0 = 1, C_n = \sum_{j=0}^{n-1} C_j C_{n-1-j}. \quad (1)$$

Bu bağıntı kullanılarak Catalan sayıları elde edilebilir ve aşağıdaki genel formül türetilebilir;

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (2)$$

burada  $\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$  binom katsayılarına karşılık gelmektedir. (2) bağıntısını kullanarak dördüncü Catalan sayısını;  $C_4 = \frac{1}{5} \binom{8}{4} = \frac{1}{5} \frac{8!}{4!4!} = 14$  elde edebiliriz. Ardışık iki Catalan sayı arasındaki ilişki ise (2) nolu denklem kullanılarak,  $\frac{C_{n+1}}{C_n}$  oranından elde edilir;

$$C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{(n+2)} C_n$$

$C_n$  Catalan sayılarından türetilen  $C(x)$  Catalan fonksiyonunu

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \quad (3)$$

şeklinde tanımlayalım. (1) ve (3) eşitliklerinden

$$C(x) - 1 = x \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} (C_j x^j) (C_{n-1-j} x^{n-1-j}) = x C(x)^2 \quad (4)$$

ikinci dereceden denklem elde edilir. Buradan Catalan sayılarından türetilen  $C(x)$  fonksiyonu

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} \quad (5)$$

bulunur.

### 3. Rassal Yürüme

Kombinatörlerin en ünlü problemlerinden birisi rassal yürüme problemidir; Bir doğru boyunca yürüyen bir kişinin  $n$  adımdan sonra yürüyüşe başladığı noktadan belirli uzaklıkta bulunması olasılığı nedir? Kabul edelim ki rassal yürüyüş simetrik bir yürüyüş yani bu kişinin sola veya sağa gitme olasılıkları eşit ve  $p = (1/2)$ . Bu problem Catalan sayılarıyla doğrudan bağlantılıdır. Rassal yürüyen kişinin  $2n$ . adımda başlangıç noktasına dönmüş olduğunu varsayalım. Sola yürüyüşü '(' sol parantez, sağa yürüyüşü ')' sağ parantez ile gösterelim. Bu kişi ilk adımını sola atmış olsun (bu sağda olabilir elbet). Bu durumda  $2n - 2$  adımda bu kişi -1 noktasında olacaktır (yani başlangıç noktasından bir adım geride).  $(2n - 1)$ . adımını sağa atması mümkün olmadığına göre sola atması gerekmektedir. Bu durumda farklı adımlarının sayısı  $C_{n-1}$  Catalan sayısıdır. Bunun nedeni  $(2n - 2)$  adımda sağa attığı adım sayısı sola attığı adım sayısına eşit olmasıdır. Bu kişinin ilk ve son adımını biliyoruz. Bu da doğrudan  $(n - 1)$  çift parantezin kaç farklı yoldan iyi düzenlenebilmesiyle ilgilidir. (2) den

$$C_n = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \quad (6)$$

bulunur. Söz konusu olay simetrik olduğundan (ilk adımın sağa atılması durumu) yukarıdaki ifadeyi 2 ile çarpmamız gerekmektedir. Buna göre bir doğru boyunca rassal olarak yürüyen bir kişinin  $2n$  adımda yürüyebileceği farklı yolların sayısı:

$$C_n = \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1}. \quad (7)$$

Bu sayı örnek uzaya bölündüğünde istenilen olasılık bulunmuş olur: her adımda iki durum (sağa veya sola) söz konusu olduğundan  $2n$  adım için  $2^{2n}$  durum söz konusudur. Buna göre olasılık:

$$\frac{1}{2^{2n-1}n} \binom{2n-2}{n-1}. \quad (8)$$

**Örnek 1.** Bir doğru boyunca yürüyen bir kişinin 20 adımda başladığı noktaya dönme olasılığı nedir? ( $n = 10$ )

$$\frac{1}{2^{19}10} \binom{18}{9} = \frac{2431}{262144}$$

Problemi biraz zorlaştıralım: Rassal yürüyen kişinin  $2n$  adımda başladığı noktaya geri döndüğünü varsayalım (bunu biliyoruz). Bunun kişinin başladığı noktaya ilk dönüş olma olasılığı nedir? Bu durumda örnek uzayımız değişmek zorunda. Rassal yürüyen kişinin  $m$  adımda  $k$  noktasına gelme olasılığı  $P(Y_m = k)$  olsun.  $l$  sola adım sayısını,  $r$  sağa adım sayısını ve  $m$  ise toplam adım sayısını gösterebiliriz;  $m = l + r$  ve  $k = r - l$  olur.  $m$  adımda sola doğru  $\binom{m}{l}$  farklı yolla adım atılabilir. Bu aynı zamanda  $k$  noktasına farklı varış sayısını da verir. Sağa veya sola adım atma olasılıkları eşit olduğundan;

$$P(Y_m = k) = \binom{m}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^m.$$

Bu durumda kişinin başlangıç noktasına dönme olasılığı,  $k = 0$  ve  $r = l = n$  olduğundan;

$$P(Y_{2n} = 0) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$

Bu ifadede pay kişinin kaç farklı yolla  $2n$ . adımda başlangıç noktasına dönebileceğini gösterdiğinden, bu sayı ile (7) in bölümünden:

$$\frac{\frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{1}{2n-1}.$$

aranan olasılık bulunur.

**Örnek 2.** Örnek 1. deki probleme göre rassal yürüyen kişinin 20 adımda başlangıç noktasına döndüğünü biliyoruz. Bunun ilk varış olma olasılığı nedir? ( $n = 10$ )

$$\frac{1}{2 \cdot 10 - 1} = \frac{1}{19}$$

Aşağıda bu konuya dair alıştırmalar verilmiştir:

1. Düzgün bir altıgen, bir biriyle kesişmeyen üç doğru parçasıyla kaç farklı yolla üçgenlere bölünebilir (Aşağıdaki şekil beşgen için verilmiştir)



2.  $1 + 2 + 3 + 4 + 5$  aritmetik işlemine üç çift parantezi kaç farklı şekilde yerleştirebilirsiniz?
3. Gülbahçe'deki sokaklar  $4 \times 4$  satranç tahtası biçimindedir. Her kare bir blok ve her çizgi bir sokağa karşılık gelsin. Bu karenin ana köşegeninin üst ucundan yola çıkan biri 4 blok güneye ve 4 blok batıya yürüyerek köşegenin alt noktasına kaç farklı yolla varabilir? (Ana köşegenin altına veya üstüne diğer taraftan geçmek söz konusu değil)

Catalan sayıları konusunda benzer bilgileri aşağıdaki web sitelerinden öğrenebilirsiniz:

1. <http://mathforum.org/advanced/robertd/catalan.html>
2. <http://mathworld.wolfram.com/CatalanNumber.html>
3. <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Miscellaneous/CatalanNumbers/catalan.html>

## KAYNAKLAR

- [1] Alter, R., Some Remarks and Results on Catalan Numbers, Proc. 2nd Louisiana Conf. Comb., Graph Theory, and Comput., sayfa 109-132, 1971.
- [2] Brualdi, D.F., Introductory Combinatorics.,3rd ed., New York:Elsevier, 1997
- [3] Dörrie, H., Euler's Problem of Polygon Division, New York:Dover, sayfa 21-27, 1965
- [4] Hilton,P. and Pederson, J., Catalan Numbers, Their Generalization, and Their Uses, Math. Int. 13, 64-75, 1991
- [5] Singmaster, D., An Elementary of the Catalan Numbers, Amer. Math. Monthly 85, 366-368, 1978
- [6] Sands, A.D., On Generalized Catalan Numbers, Disc.Math. 21, 218-221,1978