BAZI ORTALAMALAR

Hüseyin Demir

a ve b pozitif iki sayı ise

$$\frac{a+b}{2}, \qquad \sqrt{ab}$$

sayılarına sırası ile, a ve b nin *aritmetik* ve *geometrik ortalaması* denilmekte ve bu iki ortalama liselerde işlenmektedir.

Bunların dışında *kareli ortalama* denilen

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

sayısı ile

$$\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \qquad \frac{2}{k^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

olarak tanımlı h ve k ortalamaları da bazı konularda yer almaktadır. Bunlardan h ye *harmonik ortalama* denilmektedir. k ye de *kareli ters ortalama* adını veriyoruz.

Geometrik ortalama dışındaki bu dört ortalama, şu genel (1) ortalamasının özel halleridir:

$$g_\alpha(a,b) = \left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^{1/\alpha}, \quad \alpha \neq 0 \tag{1}$$

Gerçekten

$$g_1 = \frac{a+b}{2}, \quad g_2 = \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{1/2}, \quad g_{-1} = h, \quad g_{-2} = k.$$

(1) ortalaması $\alpha = 0$ için tanımsız olup g_0 ortalaması

$$g_0 = \lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}\right)^{1/\alpha} \tag{2}$$

olarak tanımlanıyor.

Bu limiti hesaplamak için (1) de her iki tarafın logaritmasını alalım:

$$\ln g_\alpha = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}$$

Buradan,

$$\ln(\lim_{\alpha \to 0} g_\alpha) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2}}{\alpha} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

olup Hospital kuralı uygulandığında

$$\begin{aligned}
\ln(\lim_{\alpha\to 0} g_\alpha) &= \frac{\lim_{\alpha\to 0}\frac{d}{d\alpha}\frac{a^\alpha+b^\alpha}{2}}{\lim_{\alpha\to 0}\frac{d}{d\alpha}\alpha} \\
&= \frac{\lim_{\alpha\to 0}\frac{a^\alpha\ln a+b^\alpha\ln b}{2}}{1} \\
&= \frac{\ln a+\ln b}{2} = \ln\sqrt{ab}
\end{aligned}$$

bulunur ki

$$g_0 = \lim_{\alpha\to 0} g_\alpha = \sqrt{ab}$$

elde edilir. Bu da geometrik ortalamadır.

Öte yandan $a \le b$ aldığımızda

$$a = \lim_{\alpha\to -\infty} g_\alpha, \quad b = \lim_{\alpha\to\infty} g_\alpha$$

olduğu ispatlanabilir ve böylece şu yedi ortalama söz konusu olur:

$$a,\ g_{-2},\ g_{-1},\ g_0,\ g_1,\ g_2,\ b.$$

α nın başka değerlerine karşılık gelen ortalamaları konumuzun dışında bırakıyoruz.

Bu ortalamalar arasında

$$g_{-i}g_i = g_0^2 = ab \quad (i = 1, 2) \tag{3}$$

bağıntısının varlığı kolayca gösterilebilir.

Örnek: 3 ve 4 sayılarının, sözü edilen yedi ortalamasının hesabı.

1) $g_{-\infty} = 3,\ g_\infty = 4,$

2) $g_0 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} = 3,464...,$

3) $g_1 = \frac{7}{2} = 3,500...,\ g_{-1} = \frac{g_0^2}{g_1} = \frac{24}{7} = 3,428...,$

4) $g_2 = \sqrt{\dfrac{25}{2}} = 5\sqrt{2}/2 = 3,535...,$

5) $g_{-2} = \dfrac{g_0^2}{g_2} = \dfrac{12}{5\sqrt{2}/12} = \dfrac{12}{5}\sqrt{2} = 3,393...,$

Bu değerleri soldan sağa doğru büyüklük sırasına göre yazalım:

$$\begin{aligned}
g_{-\infty} &= 3,\quad g_{-2} = 3,393...,\quad g_{-1} = 3,428..., \\
g_0 &= 3,464...,\quad g_1 = 3,500...,\quad g_2 = 3,535...,\quad g_\infty = 4.
\end{aligned}$$

Bu ortalamaların, α büyüdükçe büyüdüğünü gözlemekteyiz. Bu bir rastlantı olmayıp, genelde $a \le b$ için

$$a \le g_{-2} \le g_{-1} \le g_0 \le g_1 \le g_2 \le b \tag{4}$$

eşitsizlikleri vardır ve eşitsizlikler ancak $a = b$ için geçerlidir.

(4)'te tam 21 eşitsizlik yer almaktadır. Biz bunlardan sadece ilkini ispatlamakla yetineceğiz. Ötekilerin ispatı benzer olarak verilebilir.

$$a \leq g_{-2} \quad \Leftrightarrow \quad a \leq \frac{ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq b$$
$$\Leftrightarrow \quad a^2+b^2 = 2b^2 \Leftrightarrow a^2 \leq b^2. \qquad \text{(Doğru)}$$

Ortalamaların Çizimi

a ve b gibi ($a \leq b$) iki uzunluk verildiğinde g_{-2}, g_{-1}, g_0, g_1 ve g_2 uzunluklarını cetvel ve pergelle elde etmek istiyoruz.

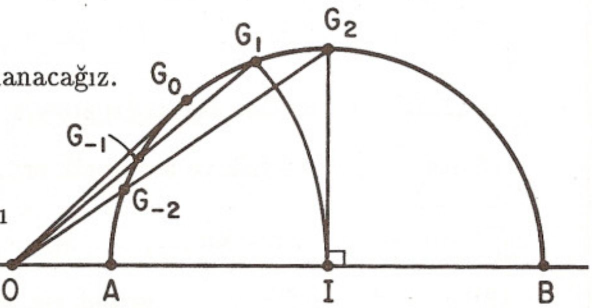
Bir doğru üzerinde alınan bir 0 noktasının aynı tarafından $|OA| = a$, $|OB| = b$ olmak üzere A ve B noktalarını alıp $[AB]$ çaplı Γ yarıçemberini çizelim.

O'nun Γ çemberine göre $|OA|.\ |OB|$ kuvvetinden yararlanacağız.

1. $[AB]$ nin ortası (Γ nın merkezi) I ise

$$|OI| = \frac{a+b}{2} = g_1$$

dir.



O merkez ve g_1 yarıçaplı çemberi Γ ile kesiştirelim. Bu noktayı G_1 ile gösterip OG_1 in Γ yı yeniden kestiği noktaya G_{-1} dersek,

$$\begin{aligned} |OG_1|\,|OG_{-1}| &= |OA|\,|OB| = ab \\ \Rightarrow |OG_{-1}| &= \frac{ab}{g_1} = \frac{g_0^2}{g_1} = g_{-1}\,. \end{aligned}$$

2. O dan Γ ya $[OG_0]$ teğet doğru parçası çizildiğinde

$$|OG_0|^2 = |OA|\,|OB| = ab \Rightarrow |OG_0| = g_0\,.$$

3. Γ nın AB ye dik $[IG_2]$ yarıçapını çizelim.

$$\begin{aligned} |OG_2|^2 &= |OI|^2 + |IG_2|^2 = \frac{(a+b)^2}{2} + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2} \\ \Rightarrow |OG_2| &= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = g_2\,. \end{aligned}$$

4. OG_2 doğrusu Γ yı yeniden G_{-2} de keserse

$$\begin{aligned} |OG_{-2}|\,|OG_2| &= |OA|\,|OB| = ab \\ \Rightarrow |OG_{-2}| &= \frac{ab}{g_2} = \frac{g_0^2}{g_2} = g_{-2}\,. \end{aligned}$$

Bu çizimlerden (4) eşitsizliklerini elde edebiliriz. G_0OI dik üçgeninden

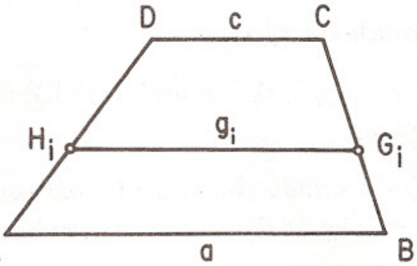
$$g_0 = |OG_0| \leq |OI| = g_1 \leq |OG_2| = g_2$$

olup

$$g_{-2} = |OG_{-2}| \le |OG_{-1}| = g_{-1} < g_0\,.$$

Bu ortalamalar yamukta da ele alınabilir:

$ABCD$, taban uzunlukları a, b $(a \ge b)$ olan bir yamuk olsun. Uçları yan kenarlar üzerinde ve tabanlara paralel olan bir $[G_iH_i]$ doğru parçasını düşünelim. $|G_iH_i| = g_i$ ise $0, 1, 2, -1$, değerlerine karşılık gelen ortalamaların çizimlerini veriyoruz.



1. $AB\,G_0H_0 \sim H_0G_0CD$.

2. $[G_1H_1]$ orta tabandır.

3. $|ABG_2H_2| = |G_2H_2CD|$ (alanların eşitliği).

4. $G_{-1}H_{-1}$ doğrusu $AC \cap BD$ dan geçer.

Bunları bir alıştırma olarak ispatlayınız ve $|G_{-2}H_{-2}|$ için bir çizim veriniz.

Aritmetik, geometrik ve harmonik ortalamalar aynı adı taşıyan; aşağıdaki dizilerle ilgilidir:

(1) $a, a+d, \ldots, a+nd, \ldots$ aritmetik dizi

(2) $a, ar, \ldots, ar^n, \ldots$ geometrik dizi

(3) $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \ldots, \frac{1}{a+nd}, \ldots$ harmonik dizi.

Bu ilgi şöyle ifade edilebilir: İlk terim dışında her terim komşu iki terimin (1) de aritmetik ortalaması, (2) de geometrik ortalaması, (3) te de harmonik ortalamasıdır.

Daha genel olarak, bu dizilerden alınan her terim kendisinden eşit uzaklıktaki iki terimin (ilgili) ortalamasıdır.

Şimdiye kadar iki sayının ortalamalarından söz ettik. $a_1, \ldots, a_n$ gibi n tane pozitif sayı verildiğinde,

$$g_\alpha = \left(\frac{a_1^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}, \qquad \alpha \ne 0 \tag{5}$$

olarak tanımlanan ortalamaya $a_1, \ldots, a_n$ sayılarının α yıncı mertebeden ortalaması denir.

g_0 geometrik ortalama ise

$$g_0 = \lim_{\alpha \to 0} g_\alpha \tag{6}$$

olarak tanımlanır ve (2) de olduğu gibi

$$g_0 = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \tag{7}$$

eşitliği ispatlanabilir.

Öteki dört ortalamanın açık ifadeleri şunlardır:

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}, \quad g_2 = \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \\ g_{-1} &= \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}, \quad g_{-2} = \sqrt{\frac{n}{\frac{1}{a_1^2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}}\,. \end{aligned}$$

Daha önce vermiş olduğumuz herbir sonucun bu genel ortalamalar için geçerli olup olmadığını araştırınız. Örneğin (3) eşitliği $n \geq 3$ için doğru değildir. Bu konuda daha geniş bilgi için *P.P.KOROWKIN'in,* Türkçe çevirisi *H.Şahinci* tarafından yapılmış olan *"Eşitsizlikler" (Matematik Derneği Yayınları, Sayı:1, 1962)* kitabı görülebilir.

Alıştırmalar

1. Kenarları a, b, c olan bir üçgende

   a) $a^2 < 2(b^2 + c^2)$ (Yol: $a < b < c$)

   b) $\sqrt{bc} + \sqrt{ca} + \sqrt{ab} \leq a + b + c$

2. Dik kenarları b, c olan bir dik üçgende hipotenüse ait yükseklik h_a ise

$$h_a^2 = \frac{1}{2} g_{-2}^2(b, c)$$

3. Kenarları a, b, c olan bir üçgende $[AD]$ bir iç açıortaydır. D den AB ye çizilen paralel doğru AC yi D' de keserse

$$|CD'| = \frac{1}{2} g_{-1}(b, c)$$

4. Kenarları a, b, c olan bir üçgende BC ye paralel olan bir doğru $[AB], [AC]$ yi E, F de kesiyor. $|EF| = |CF|$ ise

$$|EF| = \frac{1}{2} g_{-1}(a, b)$$

5. Bir $ABCD$ yamuğunda $(AB // CD)$, $K = AC \cap BD$ den DA ya çizilen paralel doğru AB yi E de, BC ye çizilen ise CD yi F de kesiyor. EF nin $BC \cap AD$ den geçtiğini gösteriniz. (Yol: $2|CF|$ ve $2|AE|$ neden tabanların harmonik ortalamalarıdır?)

6. İlk iki terimi $a_1 = 2$, $a_2 = 6$ olan
   a) aritmetik b) geometrik c) harmonik
   dizinin a_3, a_4, a_5, a_6 terimlerini bulunuz.

7. 1, 2, 4 sayılarının geometrik, aritmetik, kareli, harmonik ve kareli ters ortalamalarını hesaplayınız.

8. a, b, c, d pozitif sayılar olsun. a, b nin g_α ortalaması ile c, d nin g_α ortalamasının g_α ortalaması, bu dört sayının g_α ortalamasına eşit olacaktır yani

$$g_\alpha(g_\alpha(a, b),\ g_\alpha(c, d)) = g_\alpha(a, b, c, d)$$

   olacaktır. Gösteriniz (bkz. (5)).