DOĞRUSAL İNDİRGEMELİ DİZİLER VE SIÇRAYAN KURBAĞALAR

Albert Erkip

Önce geçen sayıdaki problemleri yanıtlamakla işe başlayalım.

(1) $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$ dizisini bulduğumuz yoldan çözmeye çalışırsak $r^2 - 2r + 1 = 0$ denklemi çıkar. Kökler $r_1 = 2r_2 = 1$. $x_n = Cr_1^n + Dr_2^n$ çözümünde C, D katsayılarını bulalım. Başlangıç değerlerinden:

$$\begin{aligned} C + D &= 1 \\ C + D &= 3 \end{aligned}$$

İşler karıştı: Bir çelişki bulduk, demek ki geçen sayıdaki yol bu kez yürümedi. Başka bir yol deneyelim. Sırayla terimleri indirgeme bağıntısından hesaplarsak, diziyi $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ olarak görüyoruz. Bu bir aritmetik dizi; genel terimi de $x_n = 2n - 1$. (Bunu kanıtlayabilir misiniz?)

(2) $x_{n+2} = (x_{n+1})^3/(x_n)^2$ bağıntısı önce gördüklerimize benzemiyor. Ama bunun logaritmasını alıp $y_n = \log x_n$ diye yeni bir dizi tanımlarsak, y_n için $y_{n+2} = 3y_{n+1} - 2y_n$ buluruz. $y_1 = \log x_1 = \log 1 = 0$, $y_2 = \log x_2 = \log 10 = 1$ değerleri de var. O halde $y_n = 2^{n-1} - 1$, aradığımız dizi ise $x_n = 10^{(2^n - 1)}$.

(3) Fibonacci dizisi $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$. Bu terimleri üçe bölüp kalanları sıralayalım: kalanlar $1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2, \ldots$. Görülen, kalanlar dizisinin 8 terimde bir tekrarladığı. Bunu nasıl kanıtlayabiliriz? x_n terimini üçe bölünce kalan tam sayıya r_n diyelim. $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ olduğundan r_{n+2} ya $r_{n+1} + r_n$ ye ya da bu sayının üçle bölündüğünde kalanına eşit. Modüler aritmetik işimizi kolaylaştırabilir. Çünkü bu son dediğimiz

$$r_{n+2} = r_{n+1} + r_n \pmod 3$$

olarak ifade edilir. Yani kalanlar da bir tür Fibonacci dizisi. Hesapladığımız terimlerden $r_1 = r_2 = 1$ ve $r_9 = r_{10} = 1$. O halde $r_{11} = r_3$, $r_{12} = r_4, \ldots, r_{n+8} = r_n$ olacak.

Şimdi r_n lere bir kez daha bakalım. $r_4 = r_8 = 0$. O halde bunlardan 8 sonraki $12, 16, 20, 24, \ldots$ terimleri hep sıfır. Bu da Fibonacci dizisinde $4, 8, 12, \ldots, 4n$-inci terimlerin üçün katı olduklarını kanıtlıyor.

Beşin katı olan terimleri bulmayı da size bırakalım.

(4) Bir sayının son rakamı, sayıyı onla böldüğümüzde elde ettiğimiz kalandır. Fibonacci dizisindeki terimlerin son rakamlarına r_n diyelim. 3. problemdeki gibi r_n için $r_{n+2} = r_{n+1} + r_n \pmod{10}$ bağıntısı vardır ve bu dizinin kendini bir yerden sonra tekrarlaması için $r_m = r_{m+k}$, $r_{m+1} = r_{m+k+1}$ olması gerekir. Bu durumda indirgeme bağıntısından dizinin ilk m terimden sonra kendini k terimde bir yinelediğini kanıtlayabiliriz.

O halde r_n'lerin tekrarlanıp tekrarlanmadığını anlamak için sabırla dizinin terimlerini yazıp ardışık (r_m, r_{m+1}) çiftinin tekrarlanıp tekrarlanmadığına bakmak gerekiyor. Yanlış yapmadımsa (r_{60}, r_{61}) çifti $(1, 1)$ yani (r_1, r_2). Demek ki dizi 60 terimde bir kendini tekrarlıyor.

Aslında tekrarlama olduğunu göstermenin daha zahmetsiz bir yolu da var. O da şu: (r_m, r_{m+1}) çiftlerinin alabilecekleri tüm değerler $(0,0), (0,1), (1.0), \ldots, (9,9)$. Bu da tam 100 farklı değer ediyor. Biz dizinin ilk 101 ardışık çifti $(r_1, r_2), (r_2, r_3), \ldots, (r_{102}, r_{103})$'ü alırsak bunlardan en az ikisinin birbirine eşit olması gerek. Yani Fibonacci dizisinin son rakamları bir yerden sonra kendilerini tekrarlamalı.

Bu ikinci verdiğimiz kanıt matematikte "çekmece ilkesi" denen bir ilkeye dayanıyor. Elimizde k tane çekmece, içlerinde de en az $k+1$ çorap varsa, en az bir çekmecede en azından iki çorap olmalıdır. Bu basit görünen ilke ile çok sayıda matematik problemi kolayca çözülebiliyor. Bir noktaya dikkat! Çorapların hangi çekmecede olduğu hakkında bu ilke hiç birşey söylemiyor. Biz de ikinci kanıtımızda tekrar olması gerektiğini bulduk, ama hangi terimde olacak, bunu ancak başka yoldan bulabiliriz.

(5) Para konusunda dikkat etmeli. A bankasına bakalım. Önce ücretini kesip sonra faiz vermesi işimize gelmiyor çünkü bu durumda kestikleri 1 milyonun faizini alamıyoruz. O halde öbür yolu tercih edeceğiz. Bankaya p_0 lira yatırdık, bir yıl sonunda $0.5p_0$ faiz aldık, 1 milyon kesildi, toplam para $p_1 = p_0 + 0.5p_0 - 1 = 1.5p_0 - 1$ oldu. Milyonları yer tutmasın diye yazmadık. n-inci yıl sonundaki toplam parayı p_n ile gösterirsek, aynı yoldan $p_{n+1} = 1.5p_n - 1$ bağıntısı çıkıyor. Geçen sayıda gördüğümüz gibi bunu çözebilmek için önce n yerine $n+1$ koyup sonra taraf tarafa çıkarıyoruz ve $p_{n+2} = 2.5p_{n+1} - 1.5p_n$ indirgeme bağıntısını buluyoruz. Başlangıç değerleri p_0 ve $p_1 = 1.5p_0 - 1$ olduğundan çözüm:

$$p_n = 2 + (p_0 - 2)(1.5)^n.$$

B bankasında işler daha kolay, n-inci yıl sonunda biriken toplam paraya q_n dersek %45 faiz aldığımızdan $q_{n+1} = 1.45q_n$. Başta p_0 lira yatırdık, o halde $q_n = p_0(1.45)^n$.

Şimdi iki bankayı kıyaslayalım. p_0 miktarı 2 milyondan azsa A kötü, çünkü paramız artmak bir yana azalıyor, bir süre sonra da borçlu çıkacağız. p_0, 2 milyondan fazlaysa belki ilk yıllarda B daha çok gelir getirebilir, ama uzun vadede $(1.5)^n$ dizisi $(1.45)^n$'den daha hızlı arttığından tercih A olmalı.

(6) Kırık basamağı bir kenara bırakıp kurbağanın herhangi bir anda n-inci basamağa gelme olasılığına p_n diyelim. Kurbağa başta birinci basamakta olduğundan $p_1 = 1$ dir. İkinci basamağa kurbağa ancak ilk seferde tek basamaklık bir sıçrayış yaparak erişebilir, bu da $1/2$ olasılıkla olur. Yani $p_2 = 1/2$. Üçüncüde işler zorlaşıyor. Onun yerine p_{n+2} ye bakalım. $(n+2)$-nci basamağa kurbağa ya $(n+1)$-inciden tek basamak sıçrayarak ya da n-inciden çift basamak sıçrayarak gelebilir. Bu son iki olayın da olasılığı $1/2$. O halde

$$p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}p_n.$$

Bu indirgemeli dizinin çözümü

$$p_n = \frac{2}{3}\left[1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right].$$

38-inci basamağa gelme olasılığı ise

$$p_{38} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{38}}\right)$$

bu da $\frac{2}{3}$ ten biraz küçük.

Öte yandan 38-inci basamağa basmadan 75-inciye varmak için kurbağa önce 37-nciye gelmeli (bunun olasılığı p_{37}) sonra çift sıçramalı (bunun olasılığı da $1/2$) ve son olarak da 39-uncudan 75-inciye gelmeli. Bu son iş için $75 - 39 = 36$ basamaklık bir yol katetmesi lazım ki, bu da birinciden 37-nciye gitmekle eşdeğer, olasılığı p_{37}. Birleştirirsek, aradığımız olasılık

$$p_{37} \cdot \frac{1}{2} \cdot p_{37} = \frac{2}{9}\left(1 + \frac{1}{2^{37}}\right)^2.$$

(7) n-inci yıl başındaki G sayısına g_n, D sayısına d_n diyelim. Başlangıçta tek bir G var, yani $g_0 = 1$, $d_0 = 0$. Her yıl bir G den bir G ve bir D, bir D den ise bir G ve iki D oluşuyor. Yani

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= g_n + d_n \\ d_{n+1} &= g_n + 2d_n \end{aligned}$$

Bu bir indirgeme bağıntısı gibi ama iki denklem ve iki bilinmeyen var. Nasıl çözeceğimizi kara kara düşünmek yerine birkaç terim hesaplayalım:

$$g_1 = 1,\ d_1 = 1; \qquad g_2 = 2,\ d_2 = 3;$$
$$g_3 = 5,\ d_3 = 8; \qquad g_4 = 13,\ d_4 = 21.$$

Bu Fibonacci dizisi. Yani tahminimiz x_n Fibonacci dizisi olmak üzere $g_n = x_{2n-1}$, $d_n = x_{2n}$. Gerçekten de bunu tümevarımla kanıtlamak zor değil. Bunu size bırakıp problemi tamamlayalım. Aradığımız d_n/g_n oranı. Fibonacci dizisi için

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

olduğunu bulmuştuk. O halde

$$\frac{d_n}{g_n} = \frac{x_{2n}}{x_{2n-1}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}}$$

$2n-1$ tek bir sayı olduğundan paydadaki $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n-1}$ terimi negatif, paydaki ise pozitiftir. Bir kesirin payını büyütüp paydasını küçültürsek kesir büyür. Yani:

$$\frac{d_n}{g_n} < \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$, halbuki $5/3 = 1.666\ldots$, daha büyük. Demek ki d_n/g_n hep $5/3$ ten ufak kalıyor.

* * * * *

Geçen sayıdaki problemlerin çözümlerine baktık. Şimdi de indirgemeli dizilerle ilgili bir-iki noktaya daha değinelim:

İlki birinci problemle ilgili. Yöntemimiz orada işlemedi. Nedeni de tahmin ettiğiniz gibi $r_1 = r_2$ olması. Genelde bakarsak iki durum söz konusu: köklerin farklı olduğu durumda geçen sayıda kullandığımız yöntem işliyor. Kökler tekrarlanıyorsa, yani çok katlı kök varsa biraz değişiklik yapmak gerekiyor. $r_1 = r_2 = \cdots = r_p$ ise o zaman çözümdeki $r_1^n, r_2^n, \ldots, r_p^n$ terimleri yerine $r_1^n, nr_1^n, n^2r_1^n, \ldots, n^{p-1}r_1^n$ terimlerini almak gerekiyor. Bu dediklerimizin kanıtı burada vermek için fazla uzun ama geçen sayıda değindiğimiz "İndirgemeli Diziler" adlı kitapta var.

İkinci nokta son problemle ilgili. Burada tek bir indirgeme bağıntısı yerine iki bilinmeyenli iki indirgeme bağıntısı bulmuştuk.

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= g_n + d_n \\ d_{n+1} &= g_n + 2d_n \end{aligned} \qquad (*)$$

Bu tür bir sistemi çözmek için çeşitli yollar var. Örneğin matrisleri kullanarak bir yöntem bulmak mümkün, daha fazla ipucu vermeden bunu meraklılara bırakalım. Sistemleri çözmenin en kısa olmasa da kolay bir yolu bilinmeyenlerden birini yoketmek. $(*)$ sisteminde ilk denklemden d_n 'yi çekelim: $d_n = g_{n+1} - g_n$. n yerine $n+1$ alırsak $d_{n+1} = g_{n+2} - g_{n+1}$. Bu iki değeri $(*)$ daki ikinci denklemde yerine koyarsak:

$$g_{n+2} - g_{n+1} = g_n + 2(g_{n+1} - g_n)$$

Toparlarsak $g_{n+2} = 3g_{n+1} - g_n$. Buradan önce g_n 'yi çözer sonra da ilk denklemde yerine koyup d_n 'yi buluruz. Yedinci problemi bir de bu yolla çözünüz!

Doğrusal indirgemeli dizilerle daha çok şey yapılabilir. Konunun ana hatlarını, temel yöntemleri öğrendiniz. Artık Olimpiyata hazır olmanız lazım.

Gelelim sıçrayan kurbağalara. Altıncı problemdeki kurbağaların benzerleri Olimpiyat hazırlık çalışmalarımızda sık sık yer aldı. Büyük Olimpik kurbağa ise 1979'da Londra'da sıçrıyordu. 1979 Olimpiyatı'nın altıncı problemi şu:

Düzgün bir sekizgenin karşı iki köşesi A ve E olsun. Bir kurbağa A köşesinden sıçramaya başlıyor. E dışındaki her köşeden kurbağa bir komşu köşeye sıçrayabiliyor. E köşesine gelince kurbağa artık sıçramıyor, orada kalıyor. Kurbağanın A'dan E'ye tam n sıçrayışta gidebileceği değişik yolların sayısına a_n diyelim. $x = 2+\sqrt{2}$, $y = 2-\sqrt{2}$ olmak üzere $n = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$a_{2n-1} = 0 \quad \text{ve} \quad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1})$$

olduğunu kanıtlayınız.

İyi şanslar!