BAZI TEMEL EŞİTSİZLİKLER

Albert K. Erkip

Bu yazımızda ele alacağımız eşitsizlikler belli koşullar altında tüm reel sayıların sağladığı bir takım bağıntılar. Bu tür temel eşitsizlikler problem çözümlerinde ara adım olarak kullanılıyor ve göreceğimiz gibi yeni eşitsizlikler bulmakta işe yarıyorlar.

Belki de en temel diyebileceğimiz eşitsizlik, herkesin tanıdığı mutlak değer için üçgen eşitsizliği.

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

Üçgen eşitsizliği her x, y reel sayısı için doğru. Daha az bilinen bir eşitsizlik ise $0 \leq (x-y)^2$ bağıntısını açarak elde edilen, her x, y için doğru olan

$$2xy \leq x^2 + y^2$$

eşitsizliği. Burada $a = x^2$, $b = y^2$ alırsak her pozitif a, b için

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \tag{1}$$

bağıntısı çıkar. (1) az sonra göreceğimiz *Aritmetik-Geometrik-Harmonik ortalama eşitsizliklerinin* özel bir hali.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitif reel sayıları için

$$H = n\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)^{-1}$$

$$G = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{1/n} \quad A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

değerlerine sırasıyla bu sayıların harmonik, geometrik ve aritmetik ortalaması adı verilir. Bu ortalamalar arasında her zaman

$$H \leq G \leq A \tag{2}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Dahası, (2)'deki eşitsizliklerden birinin (ve dolayısıyla tümünün) eşitlik olması ancak ve ancak $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ durumunda mümkündür. Bu dediklerimizin kanıtlarını vermeyip, kanıtların bir kısmı ile bu ortalamaların geometrik anlamlarını Matematik Dünyası'nın ilk sayısında Hüseyin Demir'in "Bazı Ortalamalar" adlı yazısında okuduğunuzu hatırlatalım.

Matematikte çokça kullanılan bir diğer eşitsizlik de *Cauchy-Schwarz eşitsizliği.* Tüm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve $b_1, b_2, \ldots, b_n$ reel sayıları için

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \tag{3}$$

bağıntısı geçerli. Bu eşitsizliğin zarif bir kanıtı var. x değişkeni için

$$p(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \cdots + (a_nx - b_n)^2 \tag{4}$$

polinomunu tanımlayalım. Kareleri açarak

$$\begin{aligned} M &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \\ N &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\ K &= b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 \end{aligned} \tag{5}$$

olmak üzere

$$p(x) = Mx^2 - 2Nx + K \tag{6}$$

olduğu görülür. Öte yandan (4) bize her reel x için $p(x) \geq 0$ olduğunu söyler, o halde diskriminant $\Delta \leq 0$ olmalıdır. Diskriminantı (6)'dan hesaplayalım, $\Delta = 4N^2 - 4MK \leq 0$ buluruz ki bu da (3) eşitsizliğini verir.

Kanıtımız bizę Cauchy-Schwarz eşitsizliğinde eşitlik durumunu da inceleme olanağı tanır; şöyle ki (3)'te eşitlik varsa $N^2 = MK$'dır, (6)'dan dolayı

$$p(x) = Mx^2 - 2\sqrt{MK}x + K = (\sqrt{M}x - \sqrt{K})^2$$

olur. Yani $x_0 = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{M}}$ için $p(x_0) = 0$'dır. Bu ise (4)'e göre ancak ve ancak

$$a_1x_0 = b_1, \quad a_2x_0 = b_2, \quad \ldots, \quad a_nx_0 = b_n \tag{7}$$

durumunda olur. Özetlersek Cauchy-Schwarz eşitsizliğinde eşitlik ancak ve ancak $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$ çiftleri (7)'deki gibi birbirleriyle orantılı iseler vardır.

Yine $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve $b_1, b_2, \ldots, b_n$ reel sayılarıyla başlayalım. (5)'teki gösterimle

$$(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + \cdots + (a_n + b_n)^2 = M + 2N + K$$

eşitliği açıktır. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden $N \leq \sqrt{MK}$ olduğunu biliyoruz, o halde

$$M + 2N + K \leq M + 2\sqrt{MK} = (\sqrt{M} + \sqrt{K})^2$$

ve karekök alırsak, yukarıdaki eşitlikten:

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + \cdots + (a_n + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2} \tag{8}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğe *Minkowski* ya da *üçgen eşitsizliği* adı verilir.

Vektörleri gözönüne alırsak Minkowski eşitsizliğinin geometrik anlamını çıkarabiliriz. Düzlemde $\vec{A} = (a_1, a_2)$ ve $\vec{B} = (b_1, b_2)$ vektörlerini ele alalım. $n = 2$ için Minkowski eşitsizliğini vektör uzunlukları cinsinden $|\vec{A} + \vec{B}| \leq |\vec{A}| + |\vec{B}|$ şeklinde yazabiliriz, bu da (8)'e neden aynı zamanda üçgen eşitsizliği denildiğini açıklar.

Yine vektörler dilinde Cauchy-Schwarz eşitsizliğini anlamaya çalışalım; yukarıdaki $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri için $a_1b_1 + a_2b_2$ değeri $\vec{A} \cdot \vec{B}$ iç çarpımıdır. Öte yandan bu iki vektör arasındaki açı θ ise iç çarpım için $\vec{A} \cdot \vec{B} = \cos\theta |\vec{A}|\,|\vec{B}|$ bağıntısını biliyoruz. Bunları birleştirirsek $n = 2$ için Cauchy=Schwarz eşitsizliği bildiğimiz $|\cos\theta| \leq 1$ eşitsizliğine denktir. Eşitlik durumu $|\cos\theta| = 1$ halidir ki bu da $\theta = 0$ veya $\theta = \pi$ radyan, yani $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri birbirlerine paralel demektir.

Üçgen eşitsizliğinde eşitlik durumunu ve bunun geometrik anlamını incelemeyi size bırakalım.

Verdiğimiz bu birkaç temel eşitsizlikle bile çok sayıda problemi çözmek ve yeni eşitsizlikler türetmek mümkün. Bazı örnekler verelim.

1. *Çevresi verilen üçgenler arasında alanı en büyük olanı bulunuz.*
   Üçgenin kenarları a, b, c ise yarı çevre $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ cinsinden alan için

   $$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

   bağıntısını biliyoruz. Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden:

   $$(s-a)(s-b)(s-c) \leq \left(\frac{(s-a) + (s-a) + (s-c)}{3}\right)^3 = \left(\frac{s}{3}\right)^3$$

Yani;

$$A^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \le \frac{s^3}{27} = \frac{s^4}{27}.$$

Alan için $A \le \frac{s^2}{3\sqrt{3}}$ üst sınırını bulduk. Öte yandan eşkenar üçgen için $A = \frac{s^2}{3\sqrt{3}}$ olduğundan, çevresi verilen üçgenler içinde en büyük alanı olanın eşkenar üçgen olduğunu kanıtlamış olduk. $a = b = c$ eşkenar üçgen durumunun $s-a = s-b = s-c$ hali, yani Aritmetik-Geometrik eşitsizlikte eşitlik hali olduğuna dikkat ediniz.

2. *a, b, c pozitif sayıları için $(1+abc)^3 \le (1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)$ eşitsizliğini kanıtlayınız.*

$$(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) = 1 + (a^3+b^3+c^3) + (a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3) + a^3b^3c^3$$

Aritmetik-Geometrik eşitsizlikten:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \ge abc$$

$$\frac{a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3}{3} \ge (a^3b^3b^3c^3c^3a^3)^{1/3} = (abc)^2$$

elde ederiz. Bunları yerine koyarsak aradığımızı elde ederiz.

$$(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \le 1 + 3abc + 3(abc)^2 + (abc)^3 = (1+abc)^3$$

Eşitlik halini irdeleyelim; iki Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinde de eşitlik olmalıdır, bu ise ancak $a = b = c$ durumunda olur.

3. *Pozitif $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sayıları için*

$$\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_k} \le \frac{4}{k^2(k+1)^2}\left(\frac{1^2}{a_1} + \frac{2^2}{a_2} + \cdots + \frac{k^2}{a_k}\right)$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

İstenen Aritmetik-Harmonik ortalama eşitsizliğinin ters çevrilmiş halini andırıyor, ancak biraz oynamak gerekecek.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \frac{a_3}{3} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_k}{k} + \cdots + \frac{a_k}{k}$$

yazalım, sağ tarafta $n = \frac{k(k+1)}{2}$ terim var. Bu terimlere Aritmetik-Harmonik eşitsizliği uygularsak isteneni bulduğumuzu görüyoruz.

$$\frac{n}{1/a_1 + 2/a_2 + 2/a_2 + \cdots + k/a_k + \cdots + k/a_k} \le \frac{a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k}{k} + \cdots + \frac{a_k}{k}}{n}.$$

Bu eşitsizlikteki eşitlik durumunu inceleyiniz.

4. *$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ koşulu altında*

$$d = \frac{x_1^2}{1} + \frac{x_2^2}{2} + \cdots + \frac{x_n^2}{n}$$

sayısının alabileceği en küçük değeri bulunuz.

Burada Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanmamız gerekecek. Bunun için aşağıdaki gruplamayı yapacağız.

$$1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 - x_1 + \sqrt{2}\cdot\frac{x_2}{\sqrt{2}} + \cdots + \sqrt{n}\frac{x_n}{\sqrt{n}}.$$

Cauchy-Schwarz eşitliğinden:

$$1 = \left(1 - x_1 + \sqrt{2}\cdot\frac{x_2}{\sqrt{2}} + \cdots + \sqrt{n}\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)^2 \le (1+2+\cdots+n)\left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} + \cdots + \frac{x_n^2}{n}\right)$$

$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ olduğundan; $d \geq \frac{2}{n(n+1)}$ olduğunu gösterdik. Şimdi uygun $x_1, x_2, \ldots, x_n$ için $d = \frac{2}{n(n+1)}$ değerini elde etmeye çalışalım. Bu Cauchy-Schwarz eşitsizliğindeki eşitlik durumudur ki ancak

$$(1, x_1), \left(\sqrt{2}, \frac{x_2}{\sqrt{2}}\right), \ldots, \left(\sqrt{n}, \frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)$$

çiftleri orantılı ise, yani $x_2 = 2x_1, \ldots, x_n = nx_1$ ise olur. Öte yandan $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ olduğundan;

$$x_1 = \frac{2}{n(n+1)}, \quad x_2 = 2x_1, \ldots, x_n = nx_1$$

için $d = \frac{2}{n(n+1)}$ bulunur.

Temel eşitsizlikler, genellemeleri ve kullanılmaları ile ilgili önerebileceğimiz kaynaklar arasında bu derginin birinci sayısında tanıtılan Matematik Derneği yayınlarından P.P. Korowkin'in "Eşitsizlikler" ve E. Beckenbach ile R. Bellman'ın "Eşitsizliklere Giriş" adlı kitapları var. Yine geçen sayıda, bu köşede değindiğimiz "The U.S.S.R. Olympiad Problem Book" çok sayıda eşitsizlik problemi içeriyor.

Yazıyı aralarında iki olimpiyat problemi yer alan birkaç soru ile bitirelim.

1. $x^2 + 4y^2 = 1$ koşulu altında $d = 2x + 3y$ sayısının alabileceği en büyük ve en küçük değerleri bulunuz. Problemin geometrik anlamını inceleyiniz.

2. a, b pozitif reel sayıları ve n, k tam sayıları için

$$a^k b^n \leq \left(\frac{ka + nb}{k+n}\right)^{n+k}$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

3. a_i, b_i, c_i, d_i reel sayıları için

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i d_i\right)^4 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^4\right)$$

eşitsizliğini kanıtlayınız, eşitlik durumunu irdeleyiniz.

4. a_i, b_i, c_i pozitif reel sayıları için

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i\right)^3 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^3\right)$$

eşitsizliğini kanıtlayınız.

5. (1984 Olimpiyat Sorusu)
x, y, z pozitif reel sayıları için $x + y + z = 1$ ise $0 < xy + yz + xz - 2xyz \leq \frac{7}{27}$ eşitsizliklerini kanıtlayınız.

6. (1979 Olimpiyatı Sorusu)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= a \\ x_1 + 2^3x_2 + 3^3x_3 + 4^3x_4 + 5^3x_5 &= a^3 \\ x_1 + 2^5x_2 + 3^5x_3 + 4^5x_4 + 5^5x_5 &= a^5 \end{aligned}$$

denklem takımının tüm a ve negatif olmayan $x_1, x_2, \ldots, x_5$ çözümlerini bulunuz.