FERMAT'NIN SON TEOREMİ
ya da 'MATEMATİĞİ SEVER MİSİNİZ ?'

Alev Topuzoğlu

16. yüzyıl ile 17. yüzyılın ilk yarısında Avrupa'da matematiğin "yeniden doğuşu" gözlenmektedir. Batıda yaşanan yaklaşık 1000 yıllık bir durgunluktan sonra özellikle 17. yüzyılın ilk yarısında matematikte önemli ilerlemeler görülür. Bu dönemin ilginç özelliklerinden biri matematiğin çok farklı biçimlerde algılanmasıdır. Üzerinde çalışılan problemler, kullanılan yöntemler, hatta matematiğin amacının ne olması gerektiği üzerinde değişik görüşler göze çarpar. Matematikle uğraşan kişilerin çoğu için matematik sadece bir yan uğraştır. Asıl meslekleri, geldikleri çevre nedeniyle aldıkları eğitim, sosyal konumları bu kişilerin matematikten beklentilerini de etkiler. Aralarında büyük anlaşmazlıklar çıkması kaçınılmaz olur.

Bu dönemin ünlülerinden bazıları klasik Yunan matematiğinin en belirgin özelliği olan geometrik yöntemlerin kullanımına sıkı sıkıya bağlı kalır. Öte yandan Rudolf'un *Coss* (Strassburg 1525), Cardano'nun *Ars Magna* (Nuremberg 1545), Clavius'un *Algebra* (Roma, 1608) adlı kitaplarında Harzimi'nin cebirsel denklemlerin çözümünde kullandığı yöntemlerin etkisi görülür. Uygulamalı matematikçiler diyebileceğimiz bir diğer grup ise zamanın teknolojik gelişmelerine temel oluşturacak buluşlarını tamamen farklı yöntemlerle elde ederler. Onlara göre bir buluş ancak uygulanabilir olursa değerlidir.

Pierre de Fermat (1601-1665) da dönemin matematikçilerinin tipik özelliklerini taşır. Üniversitede hukuk eğitimi görmüş, Toulouse parlamentosu üyesi ve hakim. Matematiğe ilgisi 1620'lerin sonlarında, Viète'in çalışmalarını okuyarak başladı. Bu yüzden bir anlamda Viète'in öğrencilerinden, dahası izleyicilerindendir. Viète'in öğretisinden olanlar büyük saygı duydukları ve yaşatmaya çalıştıkları klasik Yunan matematiğini sadece bir başlangıç noktası olarak görüp onu yeni yöntemlerle geliştirmek gerektiğine inanırlar.[1]

Fermat'nın analitik geometri, diferansiyel ve integral hesaplar teorisi üzerine önemli çalışmaları vardır. Sayılar teorisindeki çalışmaları, bu dalın doğuşunu simgeler. Bachet'nin 1621'de yayınladığı Diofant'ın *Aritmetik* kitabını (Bkz. [6]) Fermat'nın ne zaman okumaya başladığını bilmiyoruz ancak kitabın Fermat'nın büyük ilgisini çektiği ve yazdığı mektuplardan 1636'da kitapta değinilen konular üzerinde önemli buluşlar yapmaya başladığı anlaşılıyor. Fermat ölümüne değin "sayılar"a ilişkin çalışmalarını sürdürdü. Ancak zamanının diğer ünlülerinde aynı ilgiyi uyandıramadı; Huygens, Wallis'e *"üzerinde vakit harcanacak daha iyi konular yok değil"* diye yazıyordu. B. Pascal büyük olasılıkla aynı düşüncede olduğundan, Fermat'nın birlikte "sayılar" hakkında bir kitap yazma isteğini geri çevirdi (Bkz. [3]). Bu, matematik dünyası için önemli bir kayıp sayılır, çünkü bu girişim dışında Fermat çalışmalarını yayınlamaktan her zaman kaçındı. (Bazı matematik tarihçilerine göre bunun nedeni basılan çalışmaların yaratabileceği büyük tartışmalardan çekinmesi (Bkz. [7]).) Bu yüzden Fermat'nın sayılar teoresi üzerindeki çalışmalarına ilişkin bilgimiz, mektupları ve *Aritmetik* kitabının satır aralarına notlar türünden yazdığı gözlemlerle sınırlı.

---

[1] Fermat da Apollonius'un kayıp "Plane Loci" adlı kitabını yeniden yazmaya çalışmış. Analitik Geometri'nin temel prensiplerini buluşu bu çalışmalar sonucundadır (Bkz. [1], [3]). Analitik Geometri'nin kurucusu olarak tanınan Descartes ile aralarında bu yüzden doğan anlaşmazlıklar ünlüdür.

Ölümünden sonra, 1679'da oğlu Samuel Fermat'nın yayınladığı (babasının gözlemlerini de kapsayan) Aritmetik kitabına, geçen sayıda değinmiştik (Bkz. [6]).

Aritmetik'in VI. cildindeki 26. problemden sonra Fermat şunlari yazıyor:

> *"Kenarları rasyonel sayılar olan bir dik üçgenin alanı, bir rasyonel sayının karesi olamaz. Bu teoremi ancak uzun ve zorlu bir çalışma sonucu kanıtlayabildim. Kanıtı burada veriyorum çünkü kullandığım yöntem sayılar teorisinde büyük ilerlemelere yol açabilir".*

Sonra oldukça karmaşık bir dille ve hiçbir sembol kullanmadan kanıtı anlatıyor, *"sayfadaki boşluğun yeterli olmaması nedeniyle tüm ayrıntıları veremeyeceğini"* yazarak bitiriyor. Fermat bu yeni yönteme "sonsuz azalma" adını verdi. Fermat'nın kanıtını gelecek sayıda anlatacağız.

Bu teoremden kolayca elde edilebilen sonuçlar var; öncelikle teoremi kenarları tam sayılar olan dik üçgenler, yani Pisagor üçgenleri ([5]) için ifade edelim. (Alanı kare olan bir üçgenin kenarlarını sabit bir sayıyla çarparsak, alanını bu sayının karesiyle çarpmış oluruz ki böylece alan gene bir kare sayı olur).

Teorem (Fermat) Bir Pisagor üçgeninin alanı kare sayı olamaz.

Sonuç 1. Sıfırdan farklı x, y, z tamsayıları için $x^4 - y^4 = z^2$ denkleminin çözümü yoktur.

Kanıt: Eğer denklemi sağlayan x, y tamsayıları varsa $m = x^2, n = y^2$ olmak üzere (m, n)'nin doğurduğu (Bkz. [5]) Pisagor üçgenini ele alalım. Diğer bir deyişle dik kenarları

$$a = 2mn = 2x^2y^2 \text{ ve } b = m^2 - n^2 = x^4 - y^4$$

olan Pisagor üçgenini düşünelim. Bu üçgenin alanı

$$A = \frac{1}{2}ab = x^2y^2(x^4 - y^4) = x^2y^2z^2 = (xyz)^2$$

olacaktır. Yani alan karedir. Fakat Fermat'nın teoremine göre bir Pisagor üçgeninin alanı kare olamaz. O halde denklemi sağlayan sıfırdan farklı x, y, z tam sayıları yoktur.

Sonuç 2. Sıfırdan farklı x, y, z tamsayıları için $x^4 + y^4 = z^4$ denkleminin çözümü yoktur.

Kanıt: Denklemin x, y, z tamsayıları için sağlandığını varsayalım. Bu durumda

$$z^4 - y^4 = x^4 = (x^2)^2,$$

$x^2 = m$ alırsak

$$z^4 - y^4 = m^2$$

denklemini sağlayan m, y, z tamsayıları bulmuş oluruz. Sonuç 1'e göre bu olanaksızdır, O halde varsayımımız da olanaksızdır. Matematik Dünyası'nın 2. sayısında,

"$\boldsymbol{x^2 + y^2 = z^2}$ **denkleminin** $xyz \neq 0$ ve $x, y, z \in \mathcal{Z}$ olacak şekilde **sonsuz tane çözümü vardır"** önermesini kanıtlamıştık.

"$\boldsymbol{x^4 + y^4 = z^4}$ **denkleminin** $xyz \neq 0$ ve $x, y, z \in \mathcal{Z}$ olacak şekilde **hiçbir çözümü yoktur"** önermesini de yukarıda kanıtladık.

$x^3 + y^3 = z^3$ ya da $x^5 + y^5 = z^5$ denklemleri konusunda ne diyebiliriz?

Fermat'nın bu konuda, Aritmetik'in II. cildinde 8. problemden sonra gene sayfadaki boşluklara yazdığı not şöyle (bkz. arka kapak):

> *"Hiçbir küp sayı iki küp sayıya ayrılamaz. Aynı özellik dördüncü kuvvetler için ve genel olarak ikiden büyük tüm kuvvetler için doğrudur".*

> *(Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum ultra quadratum...)*

Bu önerme "Fermat'nın Son Teoremi" olarak bilinir;

Fermat'nın Son Teoremi: $x^n + y^n = z^n$ denkleminin $n \geq 3$ ve sıfırdan farklı x, y, z tam sayıları için çözümü yoktur.

Fermat'nın son teoremi (eğer doğruysa) henüz kanıtlanamadı. "Son" teorem olarak adlandırılmasının nedeni de bu; Fermat'nın doğruluğunu öne sürdüğü teoremler arasında zamanımıza değin kanıtlanmamış tek teorem olması. Bu önermeye teorem demek yanlış tabii, çünkü kanıtlanmadığına göre doğruluğundan emin değiliz. Ancak bu problemin ya da iddianın Fermat'nın Son Teoremi olarak anılması matematikçiler arasında alışılagelmiş.

Fermat teoremden sonra şu sözleri ekliyor:

> "Bunun gerçekten dikkat çekici güzellikte bir kanıtını buldum, ancak sayfadaki boşluk kanıtı yazamayacak kadar küçük"!!

Kanıtın doğru olup olmadığını bilemiyoruz. Büyük olasılıkla sözünü ettiği kanıt yine "sonsuz azalma" yöntemine dayanıyor ([3]). Ancak bu yöntemin her n için kullanılamayacağı biliniyor. Geçen 350 yılda pek çok matematikçinin uğraşıp çözemediği bu problemi, Fermat'nın (özellikle o dönemdeki matematiksel bilgi ile) çözmüş olması olasılığı epeyce düşük. Yaşamının son yıllarında Fermat'nın aynı problemi Carcavi ve Huygens'e önerirken kanıttan bahsetmemiş olması ([3]) da bu kanıyı doğruluyor.

Problemin çözümüne ilişkin çalışmaları gelecek sayıda anlatacağız.

Fermat'nın Son Teoremi'nin ilginç bir özelliği, matematikte *en fazla yanlış kanıtı yapılmış teorem* olması. Bunun nedeni Wolfskehl adlı bir matematikçinin 1908'de, problemi çözen kişiye verilmek üzere 100.000 Alman markını (yaklaşık 300 milyon TL) Göttingen Akademisi'ne bağışlaması.

Paul Wolfskehl, Almanya'da Darmstadt Üniversitesi'nde bir Matematik profesörü. Wolfskehl'in gençlik yıllarında Fermat'nın Son Teoremi gündemde; Berlin Üniversitesi'nden Kummer adlı bir matematikçi problemin çözümüne doğru çok önemli bir adım atmış. Hatta kısa bir süre için problemi çözdüğü sanılmış. Wolfskehl de problemle uzun süre uğraştı. Ancak çalışmaları başarısızlıkla sonuçlandı. Bu sırada başından bir de *hüsranla* biten aşk macerası geçti.

Wolfskehl ümitsizliğe kapılıp yaşamına son vermeye karar verdi. İntiharını büyük bir titizlikle planlayıp bunu gerçekleştireceği gün ve saati seçerek, vasiyetini yazdı, yapılması gereken işlerini tamamladı. "Son gün" arkadaşlarına veda mektuplarını da yazdıktan sonra belirlediği saati beklerken çalışma odasında, rafta bir makale gözüne ilişti. Bu Kummer'in Fermat'nın Son Teoremiyle ilgili çalışmasıydı. Makaleye şöyle bir göz atarken bir mantıksal yanlışlık dikkatini çekti ve oturup bu yanlışın giderilip giderilemeyeceğini incelemeye daldı. Saatler geçti, sonunda bu yanlışın sonuçları etkilemediğine emin olup saatine baktığında daha önce intihara karar verdiği saatin geçtiğini gördü. Birden, artık pek de ölmek istemediğini farketti ve vasiyeti ile mektupları yırttı!! ([2]). Yıllar sonra, 1908'de Wolfskehl öldüğünde yeni bir vasiyetname bulundu. Göttingen Bilimler Akademisi'ne bıraktığı Fermat'nın Son Teoremi'ni gelecek 100 yıl içinde kanıtlayan kişiye verilmek üzere 100.000 mark. 2007 yılına değin problem çözülebilecek mi acaba, oldukça az zaman kaldı!

Evet, **eğer matematiği severseniz yaşamınız kurtulabilir....**

Kaynakça

[1] C.B. Boyer, *A History of Mathematics.* John Wiley & Sons, 1968.

[2] W.G. Chinn, ve R.J. Davis, *"3.1416 and All That"*, Birkhäuser 1985.

[3] M.S. Mohaney, *The Mathematical Career of Pierre de Fermat 1601-1665*, Princeton Univ. Press, 1973.

[4] O. Ore, *Number Theory and its History*, McGraw-Hill, 1948.

[5] A. Topuzoğlu, "Pisagor Teoremi; ya öncesi", *Matematik Dünyası*, 1, Sayı 2, (1991) 26-29.

[6] A. Topuzoğlu, "Waring Problemi", *Matematik Dünyası*, 1, Sayı 3, (1991) 29-32.

[7] A. Weil, *Number Theory, An Approach Through History*, Birkhäuser, Boston Inc. 1984.