BİR ÜÇGENE AİT ÇEMBERLER

CEMAL KOÇ

Bu sayımızda Emre Alkan'ın derlediği problemlere devam edeceğiz. Ancak bunlar geçen sayıdakilere göre daha fazla ön bilgi gerektiriyor. Bütünlük sağlamak için önce Cemal Koç'un "Bir üçgene ait çemberler" konulu yazısına yer verdik.

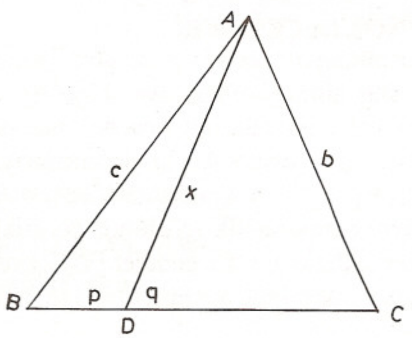
Bir üçgene ait çevrel çember, dış teğet çemberler ve dokuz nokta çemberi üçgenin en önemli öğelerindendir. Bu yazıda amacımız, gerekli ön bilgilerle birlikte söz konusu çemberlere ilişkin bazı önemli özellikleri sunmak.

Kolaylık sağlamak için, yazımız boyunca sık sık kullanacağımız gösterimleri verelim:

$\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ açılar ve açı ölçüleri
V_a, V_b, V_c kenar orta noktaları
N_a, N_b, N_c açı ortayların karşı kenarları kesim noktaları
H_a, H_b, H_c yükseklik ayakları
H ortosantr, G ağırlık merkez O çevrel çember merkezi
I; I_a, I_b, I_c iç ve dış merkezler
E dokuz nokta çemberinin merkezi.
a, b, c kenar uzunlukları
v_a, v_b, v_c kenar ortaylar
n_a, n_b, n_c açıortay uzunlukları
h_a, h_b, h_c yükseklikler
S alan, $u = \dfrac{a+b+c}{2}$ yarı çevre
R çevrel yarıçap
r, r_a, r_b, r_c iç ve dış yarıçaplar

STEWART TEOREMİ VE SONUÇLARI

Stewart teoremi bir üçgene ait kenar ortay açıortay vb. öğelerin uzunluk formüllerini hemen verebilen kullanışlı bir sonuç.



TEOREM 1: (Stewart) Bir $\widehat{ABC}$ üçgeninin [BC] kenarı üzerinde bir nokta D olsun. Eğer

$$|DA| = x,\ |DB| = p,\ |DC| = q$$

ise

$$ax^2 = pb^2 + qc^2 - apq \qquad (1)$$

olur.

İSPAT: $\widehat{ADB}$ ve $\widehat{ADC}$ açılarının ölçülerine sırasıyla α ve $\pi - \alpha$ diyerek $\widehat{ADB}$ ve $\widehat{ADC}$ üçgenlerine kosinüs teoremini uygularsak

$$c^2 = p^2 + x^2 - 2px\cos\alpha$$
$$b^2 = q^2 + x^2 + 2qx\cos\alpha$$

elde ederiz. Birincinin her iki yanını q, ikincisininkini p ile çarpıp toplarsak ispat biter.

Bu teoremde $p = q = \frac{a}{2}$ alacak olursak x kenar ortay uzunluğunu verir. Açıortay uzunluğunu bulmak için ise açıortay bağıntısı adı verilen

$$\frac{p}{c} = \frac{q}{b} = \frac{a}{c+b}$$

eşitliklerini kullanmak yeterlidir. Buna göre şu sonucu verebiliriz.

SONUÇ: Bir $\widehat{ABC}$ üçgeninin A köşesine ilişkin kenarortay v_a ve açıortay n_a ise

$$v_a^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \text{ (kenar ortay bağıntısı)} \qquad (2)$$

$$n_a^2 = cb - pq;\ (p = \frac{ac}{b+c},\ q = \frac{ab}{b+c}) \qquad (3)$$

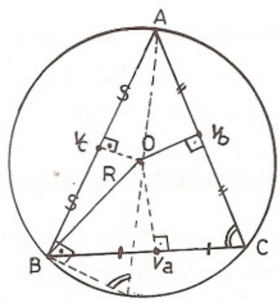
$$n_a^2 = \frac{4bcu(u-a)}{(b+c)^2}; \qquad (4)$$

olur.

Şimdi üçgenlerdeki çemberleri tek tek ele alalım.

ÇEVREL ÇEMBER

Bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin köşelerinden geçen tek bir çember vardır;



Merkezi kenar orta dikmelerinin O kesim noktası olan bu çembere çevrel çember diyoruz. aşağıdaki bağıntılar yazılabilir:

$a = 2R\sin A,\ b = 2R\sin B,\ c = 2R\sin C,$
(sinüs teoremi) (5)

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{abc}{4R} \qquad (6)$$

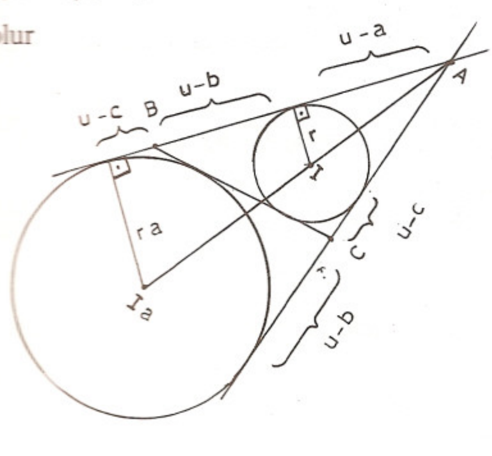
TEĞET ÇEMBERLER

Bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni için, her üç kenara da teğet olan dört çember vardır. Doğal olarak bu çemberlerin merkezleri iç ya da dış açıortayların kesim noktalarıdır. İki iç açıortay üçgen içinde, iki dış açıortay da üçgen dışında keseceklerinden bu dört çemberden birinin I merkezi üçgen içinde, diğer üçünün karşılık geldikleri köşeye göre I_a, I_b, I_c ile gösterilen merkezleri üçgen dışındadır. Benzer biçimde yarıçaplar için de r, r_a, r_b, r_c gösterimleri kullanılır. Buna göre A, B, C köşelerinden

(i) iç çembere olan teğet uzunlukları sırasıyla $u-a$, $u-b$, $u-c$

(ii) I_a merkezli dış çembere olan teğet uzunlukları u, $u-c$, $u-b$

olur



Böylece hemen şu sonuçları yazabiliriz:

$$S = ru = r_a(u-a) \qquad (7)$$

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{r}{u-a} \qquad (8)$$

Alıştırmalar:

1) $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = 1$

$\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \frac{u}{r}$

bağıntılarını kurunuz.

(2) İç teğet çemberin [BC] ye değme noktası D ise,

$$|V_aD| = \frac{|b-c|}{2}$$

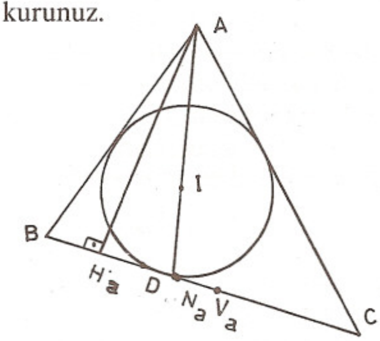
$$|V_aN_a| = \frac{a|b-c|}{2(b+c)}$$

$$|V_aH_a| = \frac{|b^2-c^2|}{2a}$$

olduklarını göstererek

$$|V_aD|^2 = |V_aN_a|\,|V_aH_a|$$

bağıntısını kurunuz.



3) $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin AN_a açıortayı çevrel çemberi A_1 noktasında keserse

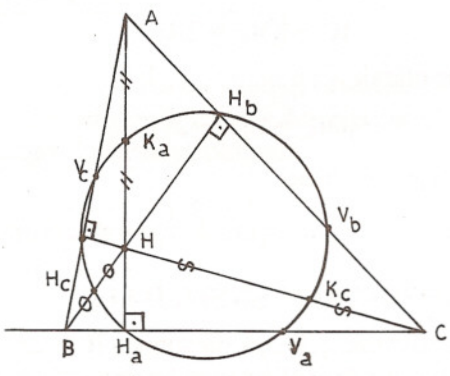
$$|A_1B| = |A_1I| = |A_1C|$$

olduğunu gösteriniz.

DOKUZ NOKTA ÇEMBERİ

Bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin H ortosantrını köşelere birleştiren doğru parçalarının orta noktaları sırasıyla K_a, K_b, K_c olsun. Açı hesaplamalarıyla H_a, H_b, H_c, V_a, V_b, V_c noktalarından herbirinin $[V_aK_a]$ doğru parçasını dik açı altında gördükleri kolayca gerçeklenebilir. Bu çember $[V_bK_b]$ ve $[V_cK_c]$ çaplı çemberlerle aynıdır. Öyleyse dikme ayakları, kenar orta noktaları ve K_a, K_b, K_c den oluşan dokuz nokta bir çember üzerindedir. Bu çembere dokuz nokta çemberi, Euler çemberi ya da Feuerbach çemberi denir.

Dokuz nokta çemberinin E merkezi [OH] ın orta noktası ve yarıçapı R/2 dir. Önce yarıçapın R/2 olduğunu görelim. Bunun için $\frac{1}{2}$ benzeşim oranıyla $\overset{\triangle}{V_aV_bV_c} \sim \overset{\triangle}{ABC}$ oluşunu düşünmek yeterli. $[V_aK_a]$ nın orta noktası olan E merkezini belirlemek için ise şu saptamaları yapalım:



(a) $V_cK_a \,//\, BH$ ve $V_cV_a \,//\, AC \Rightarrow V_cK_a \perp V_cV_a$
$V_cV_b \,//\, BC \Rightarrow AK_a \perp V_cV_b$.

Demek ki K_a noktası $\overset{\triangle}{AV_cV_b}$ üçgeninin ortosantrıdır.

(b) $OV_a \perp V_cV_b$ ve $OV_c \perp V_aV_b$ dir yani O noktası $\overset{\triangle}{V_aV_bV_c}$ üçgeninin ortosantrıdır. $\overset{\triangle}{AV_cV_b}$ ile $\overset{\triangle}{V_aV_bV_c}$ eş olduklarından

$$|OV_a| = |AK_a| = |K_aH|$$

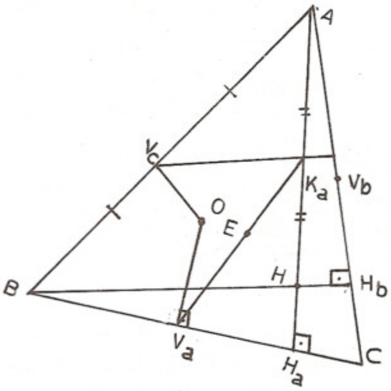
elde edilir. Böylece hem OV_aHK_a dörtgeninin paralelkenar olduğunu hem de kendi başına da önemli olan

$$|OV_a| = \frac{|HA|}{2} \qquad (9)$$

bağıntısını elde etmiş oluruz. Bu paralelkenarın OH köşegeninin ortası $[K_aV_a]$ nın E orta noktasıdır.

EULER DOĞRUSU

Şimdi OH ve AV_a doğrularının kesim noktasına K diyelim (Şekil 7).

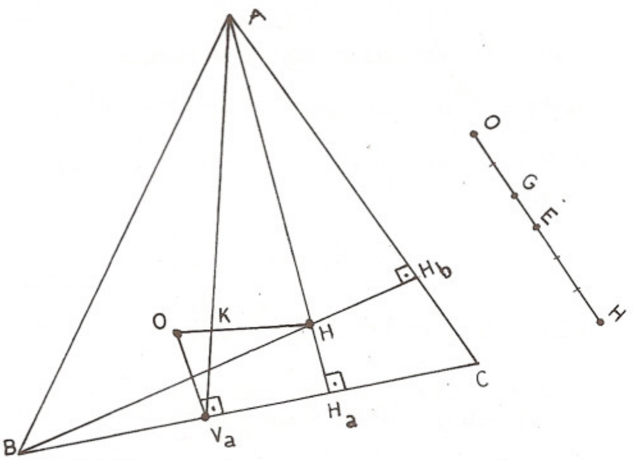


(9) uyarınca $\dfrac{|KV_a|}{|KA|} = \dfrac{|OV_a|}{|HA|} = \dfrac{1}{2}$

olduğundan K noktası $\overset{\triangle}{ABC}$ nin ağırlık merkezi yani K = G dir. Demek ki G noktası OH üzerinde olup

$$\overline{OH} = 3\overline{OG}$$

eşitliği sağlanır. Böylece O, H, G, E nin doğrudaş olduklarını görmüş bulunuyoruz. Bu noktaların üzerinde bulunduğu doğruya Euler doğrusu denir. Şekil 8'de bu noktaların Euler doğrusu üzerindeki konumları görülmektedir.



Vektörel bir yazışla,

$$\vec{OH} = 3\vec{OG} = 2\vec{OE}\,. \qquad (10)$$

EULER TEOREMİ

Önce şu teoremli işe başlayalım:

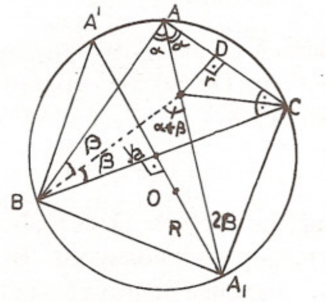
TEOREM: Bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin AI açıortayı çevrel çemberi A_1 noktasında keserse aşağıdaki bağıntılar doğrudur:

(i) $|A_1B| = |A_1I| = |A_1C|$

(ii) $r = 4R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$ (11)

İSPAT: Açılara bakacak olursak,

$$\widehat{IBA_1} = \widehat{ABA_1} - \widehat{ABI}$$
$$= \widehat{ABC} + \widehat{CBA_1} - \widehat{ABI}$$
$$= \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B})$$
$$= \widehat{BIA_1}$$



olup $\overset{\triangle}{A_1IB}$ nin ikizkenarlığı çıkar. Benzer biçimde $\overset{\triangle}{A_1IC}$ ikizkenardır. İkinci kısım için ise OA_1 in çevrel çemberi kestiği diğer noktaya A′ diyerek,

$$|A_1I| = |A_1B| = 2R \sin\frac{A}{2}$$
$$|IC| = 2|A_1I|\sin\beta = 4R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2}$$
$$r = |IC| \sin\frac{C}{2} = 4R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$$

elde edilir.

Artık çevrel çember merkezinin iç ve dış merkezlerden olan uzaklıklarını veren Euler teoremini ele alabiliriz.

Teorem (Euler) Bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin O çevrel çember merkezi ile I iç merkezi ve I_a dış merkezi arasındaki uzaklıklar

$$|OI|^2 = R(R - 2r),\ |OI_a|^2 = R(R + 2r_a) \quad (12)$$

eşitlikleri ile belirlidir.

İSPAT: Şekil 9'u kullanacak olursak, I nın AC üzerindeki dik izdüşümü D olmak üzere $\overset{\triangle}{AID} \sim \overset{\triangle}{A'A_1B}$ den $\frac{|AI|}{2R} = \frac{r}{|BA_1|}$ çıkar. Yukardaki teoremden $|BA_1| = |IA_1|$ yazarsak

$$|AI|\,|IA_1| = |AI|\,|BA_1| = 2Rr$$

ve I nın çembere göre kuvvetini ya da Stewart Teoremini kullanırsak

$$|AI|\,|IA_1| = R^2 - |OI|^2$$

elde ederiz. Böylece

$$R^2 - |OI|^2 = 2Rr$$

ve sonuç olarak

$$|OI|^2 = R(R - 2r)$$

istenen bağıntısı çıkar.

Dış teğet çember için ispatı okura bırakıyoruz.

BAZI GEOMETRİK EŞİTSİZLİKLER

Euler teoreminin çok açık bir sonucu $R \geq 2r$ eşitsizliği. Burada eşitliğin olabilmesi için O ile I nın çakışması yani üçgenin eşkenar olması gerekir ve yeter. Şimdi bu ana eşitsizliği ve bundan elde edilen bazı eşitsizlikleri verelim.

SONUÇ: Bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir. Bu eşitsizliklerde eşitlik durumunun olması için üçgenin eşkenar olması gerekir ve yeter.

1) $R \geq 2r$ (13)

2) $2u^2 \geq 27Rr$ (14)

3) $3\sqrt{3}r \leq u \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R$ (15)

4) $\sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$ (16)

5) $1 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ (17)

6) $\cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}$ (18)

İSPAT: 1) Açık

2) Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$(2u)^3 = (a+b+c)^3 \geq 27abc = 108RS = 108Rru$$

dan istenen $2u^2 \geq 27Rr$ elde edilir.

3) (13) ve (14) den dolayı,

$$2u^2 \leq 27\,Rr \leq 27(2r)r$$

çıkar ve birinci eşitsizlik elde edilir.

4) (11) ve (13) den hemen çıkar.

5) $\cos A + \cos B + \cos C =$
$1 + 4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$
oluşu nedeniyle (16) isteneni verir.

6) (17) den $\cos A \cos B \cos \geq$
$\left(\frac{\cos A + \cos B + \cos C}{3}\right)^3 \geq \frac{1}{8}$

5)'ten 3)'ün ikinci bir kanıtını verebiliriz: $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$ eşitliğini kullanacak olursak

$a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) = 8R^2(1 + \cos A \cos B \cos C)$ olur. şimdi (18) eşitsizliğinden

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 9R^2$$

elde edilir. Oysa

$3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 =$

$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \leq 0$

oluşunu kullanırsak

$$2u = a + b + c \geq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \geq 3\sqrt{3}R$$

elde edilir ve (15) deki ikinci eşitsizlik gösterilmiş olur. Eşitlik durumlarını irdelemeyi okura bırakıyoruz.

ALIŞTIRMALAR: Aşağıdaki eşitsizlikleri gösteriniz:

1) $\cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2} \geq \frac{3}{8}\sqrt{3}$

2) $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \leq \sqrt{3}$

3) $\tan\frac{A}{2} \tan\frac{B}{2} \tan\frac{C}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{9}$

4) $\sin A + \sin B + \sin C \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

FEUERBACH TEOREMİ

Konunun bütünlenmesi açısından Feuerbach teoremi zorunlu. 1800 ve 1834 yılları arasında yaşayan ve Almanya'nın Erlangen kentinde lise öğretmenliği yapan Feuerbach 1822'de yayınladığı bir kitapçıkta üçgenlere ait çemberlerle ilgili birbirinden güzel birçok bağıntı vermiş. Bunların en ilgi çekeni kendi adıyla anılır olmuş.

Teorem (Feuerbach) Dokuz nokta çemberi iç çembere ve dış çemberlere teğettir.

İspata girmeyip ilgilenen okura Cem Tezer'in gelecek sayımızdaki yazısını önereceğiz.

Son olarak iki soru:

1. (1991 Olimpiyatı:) Verilen bir ABC üçgeninde iç çemberin merkezi I olsun. A, B, C açılarının iç açıortaylarının karşı kenarları kestikleri noktaları sırasıyla A', B', C' ile gösterelim. Aşağıdaki eşitsizliğin doğru olduğunu gösteriniz.

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}$$

2. $\overset{\triangle}{ABC}$ bütün kenarları farklı uzunlukta bir üçgen, G üçgenin ağırlık merkezi, I iç merkez ve H ortosantr ise $\widehat{GIH} > 90^0$ olduğunu gösteriniz.

Kaynaklar:

- R.A. Johnson, **Modern Geometry**, Houghton Mifflin Company 1929.

- L.S. Shively, **An Introduction to Modern Geometry**, John Wiley and Sons, Inc. London 1939.

ÇÖZMECE - ÇÖZÜM

$$\left.\begin{array}{l} 393062670 \times 7 \\ 250130790 \times 11 \\ 211649130 \times 13 \end{array}\right\} = 2751438690$$