

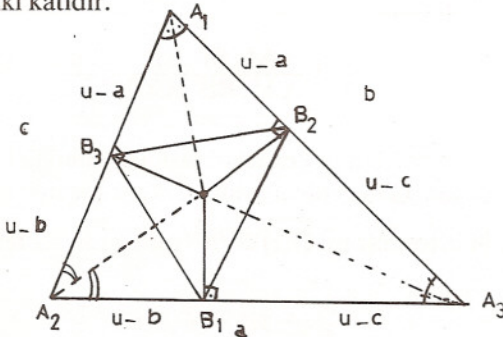
## GEOMETRİK EŞİTSİZLİKLER

EMRE ALKAN

Bir  $AB \dots F$  çokgeninin alanını  $|AB \dots F|$  ile göstereceğiz.

**Problem 1:** Köşeleri  $A_1, A_2, A_3$  olan üçgenin içteğet çemberi kenarlara sırayla  $B_1, B_2, B_3$  te değmektedir.  $A_1 B_1$  içteğet çemberi  $C_1$  de kessin  $C_2$  ve  $C_3$  te benzer şekilde tanımlansın. Aşağıdakileri gösteriniz:

- $A_1 A_2 A_3$  ün alanı  $B_1 B_2 B_3$  ün alanının en az dört katıdır.
- $A_1 A_2 A_3$  ün çevresi  $B_1 C_2 B_3 C_1 B_2 C_3$  ün çevresinin en az  $\sqrt{3}$  katıdır.
- $A_1 A_2 A_3$  ün alanı  $B_1 C_2 B_3 C_1 B_2 C_3$  ün alanının en az iki katıdır.



**Çözüm 1:**  $|A_1 A_2 A_3| \geq 4 |B_1 B_2 B_3|$  olduğunu göstermeliyiz.

$|A_1 A_2 A_3| = u \cdot r$ ,  $A_1 A_2 A_3$  ün içteğet çemberi  $B_1 B_2 B_3$  ün çevrel çemberidir.

$$B_1 B_2 = 2(u - c) \cdot \sin \frac{A_3}{2}$$

$B_2 B_3$  ve  $B_3 B_1$  de benzer şekilde yazılarak

$$|B_1 B_2 B_3| = \frac{2}{r} (u - a)(u - b)(u - c) \cdot$$

$$\sin \frac{A_1}{2} \cdot \sin \frac{A_2}{2} \cdot \sin \frac{A_3}{2}$$

eşitsizliği çıkar.

sonuç olarak, C. Koç'un yazısındaki (11) ve

(16) kullanılırsa istenen

$$|B_1 B_2 B_3| = 2 |A_1 A_2 A_3| \sin \frac{A_1}{2} \sin \frac{A_2}{2} \sin \frac{A_3}{2} \leq \frac{1}{4} |A_1 A_2 A_3|$$

eşitsizliği çıkar.

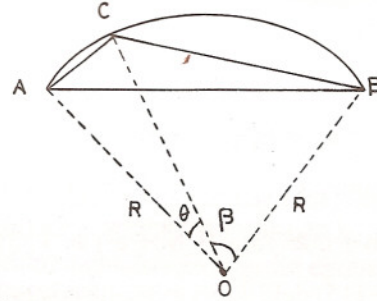
ii) Şu iki ifadeye bakalım:

\* " $A_1 A_2 A_3$  eşkenar olduğundan  $B_1 C_2 B_3 C_1 B_2 C_3$ 'ün çevresi maksimum değerini alır.

\*\* "İçteğet çemberleri eş olan üçgenler iinde minimum çevreli üçgen eşkenardır."

\* ve \*\*'yi gösterirsek,  $A_1 A_2 A_3$  eşkenar olduğunda bir minimumla bir maksimumu aynı anda yakalamış oluruz. Bu ise derhal problemin ii) ve iii) kısımlarını gösterecektir.

\*'in ispatı:  $B_1 C_2 B_3 C_1 B_2 C_3$ 'ün bir düzgün altıgen olması gerektiğini göstereceğiz.



$\widehat{ACB}$  üzerinde öyle bir C bulalım ki  $AC + BC$  maksimum olsun.

$$AC + BC = 2R \left( \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \right)$$

$R$  ve  $\frac{\theta + \beta}{2}$  sabittir.

$$\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} = \underbrace{2 \sin \frac{\theta + \beta}{4} \cdot \cos \frac{\theta - \beta}{4}}_{\text{sabit}}$$

ancak ve ancak  $\theta = \beta$  olduğunda  $AC + BC$  maksimum olur.  $C$ ,  $\widehat{ACB}$  yayının orta noktası olmalıdır.

Buradan şu sonucu çıkarabiliriz. Düzgün olmayan bir altıgenin çevresi büyütülebilir.

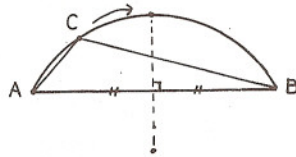
Aynı bir çember içinde maksimum çevreli düzgün altıgendir.

\*\*ise C. Koç'un yazısındaki (15) eşitsizliğinin bir yorumundan ibarettir. Şu halde içteğet çemberleri eş üçgenler ailesi içinde minimum çevreli eşkenar üçgendir.  $A_1A_2A_3$  eşkenar olduğu zaman

çevre  $(A_1A_2A_3) = \sqrt{3}$  çevre  $(B_1C_2B_3C_1B_2C_3)$  olduğu görülebilir. Bu ii)'yi ispatlar.

iii)  $S = u \cdot r$  olduğundan eş bir içteğet çemberi için minimum alanlı üçgen de eşkenardır. Maksimum alanlı altıgenin düzgün olduğu gösterilerek iii) ispatlanır.

Düzgün altıgenin maksimum alanlı olduğunu görmek için bir yay üzerindeki ortak tabanlı üçgenlerden maksimum alana sahip olanın ikizkenar olduğunu gözlemek yeterlidir.



**Problem 2.** Birinci problemde  $B_1C_3, B_2C_3, B_2C_1, B_3C_1, B_3C_2, B_1C_2$  uzunluklarından en az birinin  $12^{-3/4} \cdot \left(\frac{abc}{r}\right)^{1/2}$  ifadesinden küçük veya eşit

olduğunu gösteriniz.

**Çözüm 2:** Birinci problemde olduğu gibi  $A_1A_2A_3$ 'ün içteğet çemberini sabit turalım.  $A_1A_2A_3$ 'ün çevrel çember yarıçapı R olsun.

$$|A_1A_2A_3| = \frac{1}{4R} \cdot a \cdot b \cdot c \Rightarrow$$

$a \cdot b \cdot c = 4R \cdot |A_1A_2A_3|$  elde ederiz.  $A_1A_2A_3$  eşkenar olduğundan  $|A_1A_2A_3|$  alanının minimum olduğunu 1. problemde bulduk. Euler Teoremine göre  $R \geq 2r = \text{sabit}$  ve eşitlik ancak üçgen eşkenarsa vardır. Şu halde  $A_1A_2A_3$  eşkenarsa R'de minimum olmaktadır. Bundan dolayı  $a \cdot b \cdot c$  ifadesi üçgen eşkenarsa minimum olur.

Şimdi şunu gösterelim: Bir çember içine çizilen altıgenlerden kenarları çarpımı maksimum olan düzgün altıgendir.

AC . BC'nin ne zaman maksimum olacağına bakalım.

$$|ABC| = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \theta$$

yazılabilir. C,  $\widehat{ACB}$ 'nin orta noktası ise ABC alanı maksimum iken  $\sin \theta$  sabit olduğundan dolayısıyla AC . BC'de maksimum olur. Şu halde düzgün altıgenin kenarları çarpımı maksimumdur. Böylece  $A_1A_2A_3$  eşkenarken bir maksimumla bir minimum yakaladık. Böylece,  $B_1C_3 \cdot B_2C_3 \cdot B_2C_1 \cdot B_3C_1 \cdot B_3C_2 \cdot B_1C_2$

$$\leq (a \cdot b \cdot c)^2 / 3^3 \cdot 4^3 \quad (1)$$

elde ederiz. Ceva teoremi yardımıyla

$$\frac{u-a}{u-b} \cdot \frac{u-b}{u-c} \cdot \frac{u-c}{u-a} = 1$$

olduğundan  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3$  doğruları bir noktada kesişirler. Benzerlikten

$$\frac{a_1}{a_4} = \frac{x_2}{x_4} = \frac{a_3}{a_6} = \frac{x_4}{x_6}, \quad \frac{a_5}{a_2} = \frac{x_6}{x_2}$$

yazılıp taraf tarafa çarpılırsa

$$a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 = a_2 \cdot a_4 \cdot a_6$$

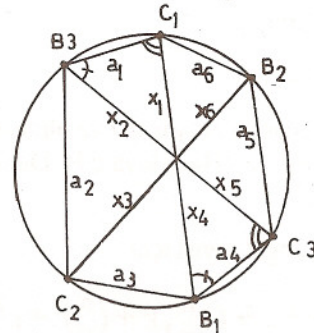
$\Rightarrow B_3C_1 \cdot B_1C_2 \cdot B_2C_3 = B_3C_2 \cdot B_1C_3 \cdot B_2C_1$  elde edilir.

Altıgenin kenarlarını böylece çarpımları eşit iki kümeye ayırmış olduk. Altıgenin kenarlarından en az biri içteğet çember yarıçapından büyük veya eşit olmalıdır. Genelliği bozmadan  $B_3C_1 \geq r$  kabul edelim. (1) eşitsizliğinden,  $B_3C_1 \cdot B_1C_2 \cdot B_2C_3 \leq abc/24\sqrt{3}$ ,  $B_3C_1 \geq r$  olduğu kullanılırsa,  $r \cdot B_1C_2 \cdot B_2C_3 \leq abc/24\sqrt{3}$ , genelliği bozmadan  $B_1C_2 \leq B_2C_3$  alalım.

$$\Rightarrow (B_1C_2)^2 \leq \frac{abc}{r} \cdot \frac{\sqrt{3}}{72} \Rightarrow$$

$$B_1C_2 \leq 12^{-3/4} \cdot \left(\frac{abc}{r}\right)^{1/2}$$

elde edilir. Bu da istenen sonuçtur.



**Alıştırma:** Bir üçgenin kenarları a, b, c alanı da S olsun.

$$a^2 + b^2 + c^2 > 6 \cdot S$$

olduğunu gösteriniz.