**A 16.** a, b, c, a′, b′, c′ sıfırdan farklı gerçel sayılar ve

$a^2 = b^2 + c^2$

$a'^2 = b'^2 + c'^2$

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

ise

$aa' = bb' + cc'$

olduğunu ispatlayıp ayrıca geometrik yorumunu yapınız.

**ÇÖZÜM:** (Atasağun Baykal, Ankara)

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$ dersek $a = ka'$, $b = kb'$, $c = kc'$.

Bunları $a^2 = b^2 + c^2$ de yerlerine koyalım:

$ka'.a = kb'.b + kc'.c \Rightarrow aa' = bb' + cc'$

Geometrik Yorum: $a^2 = b^2 + c^2$, $a'^2 = b'^2 + c'^2$ eşitlikleri, Pisagor Teoreminin iki ayrı dik üçgene uygulanışıdır.

Üçgenler, karşılıklı kenarları orantılı olduğundan benzerdirler.

Demek ki ispatladığımız bağıntıya göre benzer iki dik üçgenin, eşit dar açıları karşısındaki kenarlarının çarpımları toplamı, hipotenüslerin çarpımına eşittir.

**A 17.** 1'den 1991'e kadar (1991 dahil) olan tek sayıların 1991'inci kuvvetleri toplamı olna

$1^{1991} + 3^{1991} + ... + 1991^{1991}$

sayısının birler basamağındaki sayı kaçtır?

**ÇÖZÜM:** (Ruhi Tabur, İzmit)

$$\underbrace{1^{1991} \equiv 11^{1991} \equiv 21^{1991} \equiv 3^{1991} \equiv ... \equiv 1981^{1991} \equiv 1991^{1991}}_{200 \text{ tane}} \equiv 1 \pmod{10}$$

$$\underbrace{3^{1991} \equiv 13^{1991} \equiv 23^{1991} \equiv 33^{1991} \equiv ... \equiv 1983^{1991}}_{199 \text{ tane}} \equiv 7 \pmod{10}$$

$$\underbrace{5^{1991} \equiv 15^{1991} \equiv 25^{1991} \equiv 35^{1991} \equiv ... \equiv 1985^{1991}}_{199 \text{ tane)}} \equiv 5 \pmod{10}$$

$$\underbrace{7^{1991} \equiv 17^{1991} \equiv 27^{1991} \equiv 37^{1991} \equiv ... \equiv 1987^{1991}}_{199 \text{ tane}} \equiv 3 \pmod{10}$$

$$\underbrace{9^{1991} \equiv 19^{1991} \equiv 29^{1991} \equiv 39^{1991} \equiv ... \equiv 1989^{1991}}_{199 \text{ tane}} \equiv 9 \pmod{10}$$

olmak üzere

$1^{1991} + 3^{1991} + 5^{1991} + ... + 1991^{1991} \equiv$

$200 . 1 + 199 . 7 + 199 . 5 + 199 . 3$

$+ 199.9 = 1 + 199 . (1 + 7 + 5 + 3 + 9) =$

$= 1 + 199 . 25 = 4976$

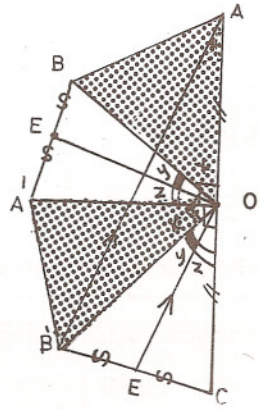
olup mod 10'a göre bu toplam

$4976 \equiv 6 \pmod{10}$ olur.

Sayının birler basamağı 6 olur.

**A 18.** Bir OAB üçgen O köşesi etrafında pozitif yönde 90° döndürülerek OA′B′ üçgeni elde ediliyor. [A′B]'nin ortası E ise OE ⊥ AB′ olduğunu ispatlayınız.

**ÇÖZÜM:** (M. Necati Üstünay, Ankara)




[OA′] ⊥ [OC] ve

|OA| = |OA′| = |OC| olacak biçimde bir c noktası alalım.

$$\left.\begin{array}{l} m\,\widehat{AOA'} = m\,\widehat{A'OC} \\ m\,\widehat{AOB} = m\,\widehat{A'OB'} \end{array}\right\} \Rightarrow m\,\widehat{BOA'} = m\,\widehat{B'OC}$$

$|OB| = |OB'|$ ve $|OA'| = |OC|$ ise

$\overset{\triangle}{BOA'} \cong \overset{\triangle}{B'OC}$ ve

$\overset{\triangle}{BOE} \cong \overset{\triangle}{B'OE'} \Rightarrow m\widehat{BOE} = m\,\widehat{B'OE'} = y$

$\overset{\triangle}{EOA'} \cong \overset{\triangle}{E'OC} \Rightarrow m\,\widehat{EOA'} = m\,\widehat{E'OC} = z$

$x + y + z = 90^\circ \Rightarrow m\,\widehat{EOE'} = 90^\circ$

$\overset{\triangle}{AB'C}$ de ... $\quad |AO| = |OC|$

$\qquad |B'E'| = |E'C|$

ise $OE'] // [AB']$

ve $[OE] \perp [OE']$

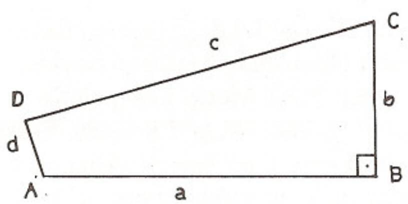
ise $[OE] \perp [AB']$

**A 19.** Ardışık kenar uzunlukları a, b, c, d olan ve B, D açıları dik olan bir ABCD dörtgeninde

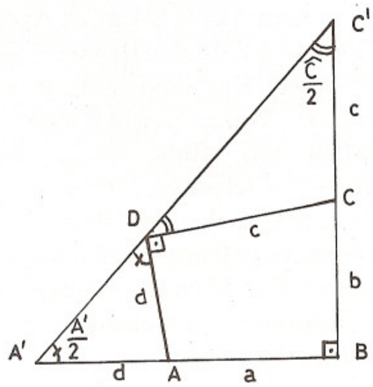
$$\frac{a+d}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{b+c}{\cos\frac{C}{2}}$$

olacağını ispatlayınız.

*(Hazırlayan: Hüseyin Demir)*




**ÇÖZÜM:** (Erhan Gürel, Ankara)




AB'yi A'dan itibaren d kadar, BC'yi de C'den itibaren c kadar uzatalım.

$$\widehat{CC'D} = \widehat{C'DC} = \frac{\widehat{C}}{2}$$

$$\widehat{AA'D} = \widehat{A'DA} = \frac{\widehat{A}}{2}$$

$$\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$$

$\Rightarrow \dfrac{\widehat{A}}{2} + \dfrac{\widehat{C}}{2} = 90^\circ$ olduğundan

$[A'C']$ doğrusaldır.

Oluşan $\overset{\triangle}{A'BC'}$ dik üçgeninde

$\tan\dfrac{\widehat{C}}{2} = \dfrac{a+d}{b+c}$ olur.

$$\frac{\sin\frac{\widehat{C}}{2}}{\cos\frac{\widehat{C}}{2}} = \frac{a+d}{b+c}$$

$$\frac{\cos\frac{\widehat{A}}{2}}{\cos\frac{\widehat{C}}{2}} = \frac{a+d}{b+c}$$

$\Rightarrow \dfrac{a+d}{\cos\frac{\widehat{A}}{2}} = \dfrac{b+c}{\cos\frac{\widehat{C}}{2}}$ olur.

**A 20.** a, b, c, d pozitif sayılar ve

$a + b + c + d = 8$ ise

$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} < 6$ olacağını gösteriniz.

**ÇÖZÜM:** (Namık Gök, İzmir)

Cauchy - Schwarz eşitsizliğini kullanalım,

$(\sqrt{a}\,.\,1 + \sqrt{b}\,.\,1 + \sqrt{c}\,.\,1 + \sqrt{d}\,.\,1)^2 \leq$

$(a + b + c + d)\,(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)$

$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d})^2 \leq 8\,.\,4$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} \leq 4\sqrt{2} < 6$

Sonuç olarak

$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} < 6$ olur.

Y 16. a, b, c herhangi gerçel sayılar olduğuna göre

$$\sqrt{a^2+\sqrt[3]{a^4b^2}+\sqrt[3]{a^4c^2}}$$
$$+\sqrt{b^2+\sqrt[3]{b^4c^2}+\sqrt[3]{b^4a^2}}$$
$$+\sqrt{c^2+\sqrt[3]{c^4a^2}+\sqrt[3]{c^4b^2}}$$
$= (a^{2/3} + b^{2/3} + c^{2/3})^{3/2}$ olacağını ispatlayınız.
(Hazırlayan: Hüseyin Demir)

ÇÖZÜM
(Volkan Doğan, Gaziantep)

$$\sqrt{a^2+\sqrt[3]{a^4b^2}+\sqrt[3]{a^4c^2}}$$
$$+\sqrt{b^2+\sqrt[3]{b^4c^2}+\sqrt[3]{b^4a^2}}$$
$$+\sqrt{c^2+\sqrt[3]{c^4a^2}+\sqrt[3]{c^4b^2}}$$
$= [a^{4/3} (a^{2/3} + b^{2/3} + c^{2/3})]^{1/2}$
$+ [b^{4/3} (b^{2/3} + c^{2/3} + a^{2/3} )]^{1/2}$
$+ [c^{4/3} (c^{2/3} + a^{2/3} + b^{2/3} ]^{1/2}$
$= (a^{2/3} + b^{2/3} + c^{2/3} )^{1/2} (a^{2/3} + b^{2/3} + c^{2/3} )$
$= (a^{2/3} + b^{2/3} + c^{2/3} )^{3/2}$

**Diğer Çözenler:**
M. Necati Üstünay, Ömer Acımert, Zeliha Çetin, Erhan Gürel, Fatih Kıhtır, Emre Acar, Hakan Kaşlı, Taner Kahveci, Muharrem Kocakuşak, Cem Ammiler, Murat Limoncu, Selda Tıraş (Ankara) – Vehted Kılınç, Ümit Uzel, Hasan Çetinkaya, Ufuk Yavuz, Aynur Baysoy, Mert Güzelbağ, Oğuz Akyıldit, Cem İyigün, Selda Hasanbaş, Çiğdem Karabulut, Zafer Polat, Aydın Ünverdi (İstanbul) – Tolga Atay, Bilal Yurdakul, Namık Gök (İzmir) – Levent Irak, İnci Damar (Çorum) – Erol Gedikli, Serap Yılmaz (Trabzon) – Seçim Kayar (Diyarbakır) – Selçuk Özer (Eskişehir) – Selim Çetintürk (Balıkesir) – Sercan Çevikol (Antalya) – Ruhi Tabur (İzmit)

Y 17. $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$ polinomunu (a, b, c'nin mümkün olan en küçük dereceli ve tam katsayılı polinomlarının çarpımı olarak) çarpanlara ayırınız.

ÇÖZÜM I: (M. Necati Üstünay, Ömer Acımert, Ankara)
$a - b = x$, $b - c = y$ alınırsa
$c - a = -(x + y)$ olur.

$(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$
$= x^3 + y^3 - (x + y)^3$
$= x^3 + y^3 - x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3$
$= -3xy (x + y)$
$= 3xy [-(x + y)]$
$= 3(a - b) (b - c) (c - a)$.

ÇÖZÜM II: (Yusuf Macun, Ankara)

$P(a; b; c) = (a-b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$ en fazla üçüncü dereceden bir polinomdur, dolayısıyla en fazla 1. dereceden üç çarpanı vardır.

$a = b$, $b = c$ ve $c = a$ için polinomun değeri sıfıra eşittir, dolayısıyla $(a - b)$, $(b - c)$ ve $(c - a)$ polinomun çarpanlarıdır. Bu üç çarpan birbirinden farklı olduğuna ve polinomun en fazla üç çarpanı olduğuna göre,

$P(a; b; c) = \lambda (a - b) (b - c) (c - a)$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

$a^2$ nin katsayısı $3(c - b)$ olduğuna göre, $\lambda = 3$

ve $P(a; b; c) = 3(a - b) (b - c) (c - a)$

(Basit özdeşliklerle de aynı sonuç bulunabilir)

**Diğer Çözenler:**

Erhan Gürel, Turan Bulut, Tamer Kahveci, Emre Acar, Fatih Kıhtır, Atasağun Baykal, Ahmet Ceyhan, Fatih Meriç, Lokman Kuzu, Alper Halbutoğulları, Murat Limoncu, Ercan Şahin (Ankara) – Önder Sayı, C. Alparslan Ertuğ, Aynur Baysoy, Ufuk Yavuz, Selda Hasanbaş, İbrahim Çanak, Çiğdem Karabulut, Aydın Ünverdi, Doğan Mersin (İstanbul) – Tolga Atay, Bahri Akyol, Ş. Emrah Aydın, Namık Gök, Bilal Yurdakul (İzmir) – Selim Çetintürk, Serkan Kurtuluş (Balıkesir) – Levent Irak (Çorum) – Volkan Doğan (Gaziantep) – Ali Işıtan (Samsun) – Ruhi Tabur, Serkan Darcan (İzmit) – Selçuk Özer (Eskişehir) – Alim Yılmaz (Manisa) – Sait Ulutepe (Bursa) – Hasan Çetinkaya (Afyon) – Selim Kayar (Diyarbakır) – Can Mavruk (Adana) – Erol Gedikli (Trabzon) – Işın Celkan (Erzurum) – Nilüfer Özcan (Mardin)

**Y 18.** $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin^3\left(\frac{\pi}{3^n}\right) = ?$

**ÇÖZÜM:** (Ali Işıtan, Samsun)

Sin $3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, buradan:

$\sin^3\alpha = \frac{3}{4}\sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 3\alpha$

eşitliği yardımıyla

$3\sin^3(\pi/3) = \frac{3^2}{4}\sin(\pi/3) - \frac{3}{4}\sin\pi$

$3^2\sin^3(\pi/3^2) = \frac{3^3}{4}\sin(\pi/3^2) - \frac{3^2}{4}\sin(\pi/3)$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$3^k\sin^3(\pi/3^k) = \frac{3^{k+1}}{4}\sin(\pi/3^k) - \frac{3^k}{4}\sin(\pi/3^{k-1})$

taraf tarafa toplanırsa;

$\sum_{n=1}^{k} 3^n \sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right) = \frac{3^{k+1}}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3^k}\right)$. (Sin $\pi = 0$)

elde edilir.

$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin^3\left(\frac{\pi}{3^n}\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} 3^n \sin^3\left(\frac{\pi}{3^n}\right)$

$= \lim_{k\to\infty} \left[\frac{3^{k+1}}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3^k}\right)\right]$

$= \frac{3\pi}{4} \lim_{k\to\infty} \frac{\sin(\pi/3^k)}{\pi/3^k}$

$\frac{\pi}{3^k} = y$ dersek, $k \to \infty$ iken $y \to 0$ olur. O halde

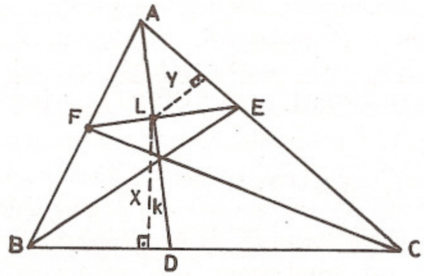
$\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ olduğundan,

$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin^3\left(\frac{\pi}{3^n}\right) = \frac{3\pi}{4}$ bulunur.

**Diğer Çözenler:**

M. Necati Üstünay, Atasağun Baykal, Alper Halbutoğulları, Murat Limoncu, Yusuf Macun (Ankara) – Cem Mutlugün, Doğan Mersin, İbrahim Çanak, Aydın Ünverdi (İstanbul) – Selçuk Özer (Eskişehir) – Hasan Çetinkaya (Afyon) – Volkan Doğan (Gaziantep) – Ruhi Tabur (İzmit)

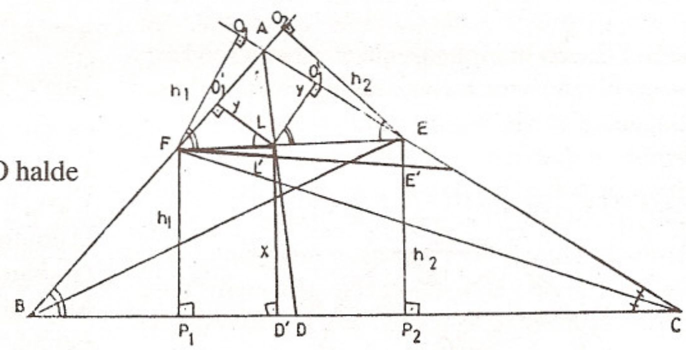
**Y 19.** Bir ABC üçgeninde [AD], [BE], [CF] iç açıortaylarıdır. AD ∩ EF = L ise L'nin BC'ye uzaklığı x ve AC'ye uzaklığı da y ise, x = 2y olduğunu gösteriniz. *(Hazırlayan: Hüseyin Demir)*




**ÇÖZÜM:** (Erhan Gürel, Ankara)

F ve E den BC'ye iki dik indirelim. Diklerin uzunluğu $h_1$ ve $h_2$ olsun.

$\frac{[EL]}{[FL]} = k$ olsun.




CF açıortay olduğundan $[FO_1] = h_1$ olur.

BE açıortay olduğundan $[EO_2] = h_2$ olur.

$\widehat{O_1'LE} \sim \widehat{O_1FE} \Rightarrow$

$\frac{y}{h_1} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow h_1 = y\frac{(k+1)}{k}$

$\widehat{O_2'LF} \sim \widehat{O_2EF} \Rightarrow$

$\frac{y}{h_2} = \frac{1}{k+1} \Rightarrow h_2 = y(k+1)$

F'den BC ye paralel çizelim. Bu doğru LD' yü L' de, $EP_2$ yi de E' de kessin.

$\widehat{FL'L} \sim \widehat{FE'E} \Rightarrow \frac{[LL']}{[EE']} = \frac{1}{k+1}$ olur.

$[LL'] = x - h_1$

$[EE'] = h_2 - h_1$ olur.

$$\frac{x - h_1}{h_2 - h_1} = \frac{1}{k+1}$$

$$\frac{x - y\frac{(k+1)}{k}}{y(k+1) - y\frac{(k+1)}{k}} = \frac{1}{(k+1)} \Rightarrow \frac{xk - y(k+1)}{y(k+1)(k-1)} = \frac{1}{(k+1)}$$

$xk - y(k+1) = y(k-1)$

$xk = y(k - 1 + k + 1)$

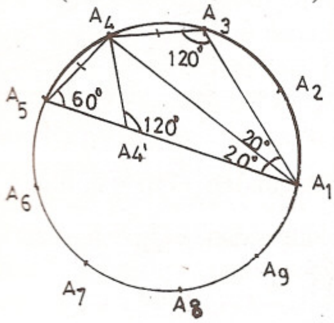
$x = 2y$

**Diğer Çözenler:**

Hasan Çetinkaya (Afyon) – Atasağun Baykal, Alper Halbutoğulları (Ankara) – Volkan Doğan (Gaziantep) – Selçuk Özer (Eskişehir) – Aydın Ünverdi, Alpaslan Ertuğ (İstanbul).

**Y 20.** Düzgün bir dokuzgenin en uzun ve en kısa köşegenleri farkının kenar uzunluğu kadar olduğunu gösteriniz. *(Hazırlayan: Hüseyin Demir)*

**ÇÖZÜM I :** (Erhan Gürel, Ankara)




$A_1A_5$ te $A_4'A_5 = A_4A_5$ olacak $A_4'$ noktası alalım.

Simetriden dolayı; $[A_1A_4'] = [A_1A_3]$ olur.

$[A_1A_4'] = [A_1A_5] - [A_4A_5]$

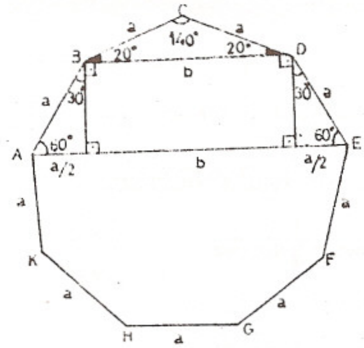
$[A_4A_5] = [A_1A_2]$

$[A_1A_4'] = [A_1A_5] - [A_1A_2]$

$[A_1A_3] = [A_1A_5] - [A_1A_2]$

$\Rightarrow [A_1A_5] = [A_1A_2] + [A_1A_3]$ olur.

**ÇÖZÜM II :** (Aziz Kalender, Tokat)




Şekildeki dokuzgenden de görüldüğü gibi en uzun köşegen $|AE|$ ve en kısa köşegen $|BD|$ dir.

Dokuzgenin iç açısı

$180° - \frac{360°}{n}$ formülünden $180° - \frac{360°}{9} = 140°$

bulunur.

Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi gerekli işlemleri yaptıktan sonra

$|AE| = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + |BD|$ $\qquad b = |BD|$

$|AE| = a + b$ buradan

$a = |AE| - |BD|$ bulunur.

**Diğer Çözenler:**

Ömer Acımer, Tamer Kahveci, Erhan Gürel, Engin Der, Fatih Kıhtır, Onur Kıymaz, Lokman Kuzu, Emre Acar, Atasağun Baykal, Alper Halbutoğulları, Murat Limoncu, Yusuf Macun (Ankara) – Önder Sayı, Doğan Mersin, Cem Mutlugün, Oğuz Akyıldit, Hasan Çetinkaya, Ümit Uzel, Aydın Ünerdi, Alpaslan Ertuğ, Ufuk Yavuz (İstanbul) – Tolga Atay, Ş. Emrah Aydın, M. Sacit Çetiner, Tanju Kılıç, Murat Beybağa (İzmir) – Serkan Kurtuluş (Balıkesir) – Volkan Doğan (Gaziantep) – Ruhi Tabur (İzmit) – Selçuk Özer (Eskişehir) – Alim Yılmaz (Manisa) – Işın Celkan (Erzurum) – Mustafa Devşiren (Bursa)– (Nilüfer Özcan, Mardin)