

BİR ÜÇGENDE NOKTADAŞ DİKMELER

HÜSEYİN DEMİR

"Noktadaş doğrular" deyince, aynı noktadan geçen doğruları, "doğrudaş noktalar" deyince de aynı doğru üzerinde bulunan noktaları anlıyoruz. Buna göre doğrudaş düzlemlerle düzlemdes şekillerin anlamlarını da vermiş oluyoruz.

Geçen sayıda bir üçgenin kenar doğruları üzerinde bulunan üç noktanın doğrudaş olması için gerek ve yeter koşulu veren Menelaus teoremi ile, bir üçgenin köşelerinden geçen üç doğrunun noktadaş olması için gerek ve yeter koşulu veren Ceva teoremi C. Tezer tarafından ele alınmış ve bu iki teoremin çeşitli uygulamaları verilmişti.

Konuyu tamamlamak için bu yazımızda bir üçgenin kenar doğrularına dik olan üç doğrunun noktadaş olması için gerek ve yeter koşulu veren bir teoremden söz edecek ve bu teoremin birkaç uygulamasına yer vereceğiz.

TEOREM: Bir tam üçgen¹ verildiğinde BC, CA, AB kenarlarına D, E, F gibi üç noktada dik olan üç doğrunun noktadaş olması için gerek ve yeter koşul

$$|DB|^2 - |DC|^2 + |EC|^2 - |EA|^2 + |FA|^2 - |FB|^2 = 0 \quad (1)$$

eşitliğidir.

İSPAT: Tam üçgen ABC ve doğrular da d, e, f olsun.

a) Gereklilik: d, e, f doğruları bir P noktasında kesişsinler. Bu durumda (1) deki u toplamı, Pisagor teoreminden,

$$u = |PB|^2 - |PC|^2 + |PC|^2 - |PA|^2 + |PA|^2 - |PB|^2$$

olup sıfırdır.

b) Yeterlilik: (1) eşitliği geçerli olsun. e ve f doğrularının arakesitine P diyelim. d nin P den geçeceğini göstermeliyiz.

P den BC ye çizilen d dikmesi BC yi D' de kessin. (1) gereğince

$$|D'B|^2 - |D'C|^2 + |EC|^2 - |EA|^2 + |FA|^2 - |FB|^2 = 0 \quad (1')$$

olup (1) ve (1') den

$$|D'B|^2 - |D'C|^2 = |DB|^2 - |DC|^2 \quad (2)$$

elde edilir.

Yönlü uzunlukları (Cilt I, Sayı 4, s. 15) kullanarak (2) nin her iki tarafını çarpanlara ayıralım:

$$(\overline{D'B} - \overline{D'C})(\overline{D'B} + \overline{D'C}) = (\overline{DB} - \overline{DC})(\overline{DB} + \overline{DC}). \quad (3)$$

Burada

$$\overline{D'B} - \overline{D'C} = \overline{CD'} + \overline{D'B} = \overline{CB}$$

$$\overline{DB} - \overline{DC} = \overline{CB}$$

olup (3) eşitliği

$$\overline{D'B} + \overline{D'C} = \overline{DB} + \overline{DC}$$

yi verir. Buradan da

$$\overline{D'B} - \overline{DB} = \overline{DC} - \overline{D'C}$$

$$\Rightarrow \overline{D'B} + \overline{BD} = \overline{DC} + \overline{CD'}$$

$$\Rightarrow \overline{D'D} = \overline{DD'}$$

$$\Rightarrow \overline{D'D} = -\overline{D'D} \Rightarrow \overline{D'D} = 0 \Rightarrow D' = D$$

elde olunur. Bu da d nin P den geçtiğini, yani d, e, f nin noktadaşlığını gösterir.

Bu teoremin en sade iki uygulaması şunlardır:

Uygulama 1. Bir ABC üçgeninde kenarların orta dikmeleri noktadaştır.

Bildiğimiz bu özellik (1) in kullanılmasıyla hemen çözüm bulur:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = 0$$

¹ Noktadaş olmayan üç doğrunun oluşturduğu şekil.

Uygulama 2. Bir tam üçgende yükseklikler noktadaştır.

Yüksekliklerin ayakları D, E, F ise (1) eşitliği, Pisagor teoreminden, hemen gerçekleşir.

(1) deki toplamın Σ ile gösterilmesi.

(1) eşitliği, toplama simgesi olan Σ (sigma) ile şöyle gösterilir:

$$\Sigma (|DB|^2 - |DC|^2) = 0 \quad (4)$$

Bu yazılışa anlam veremeyenler için sade örneklerle başlayıp açıklama yapalım:

1. a, b, c gibi üç sayı söz konusu olduğunda Σa toplamını tanımlamak için, a, b, c sayılarıyla ilgili çembersel permutasyon denilen

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

permutasyonunun uygulayarak Σa ya şu anlam verilir: Σa toplamı, ilk terimi a, ikinci terimi a'nın dönüştüğü b sayısı, son terimi de b'nin dönüştüğü c sayısının toplamıdır.

$$\Sigma a = a + b + c$$

Aynı toplamın Σb ya da Σc ile de gösterilebileceği açıktır.

2. Yukarıda verilen kuralla Σab toplamı $ab + bc + ca$ dır. Aynı toplam Σbc ya da Σca olarak da gösterilebilir.

$$3. \Sigma(b - c) = b - c + c - a + a + a - b = 0$$

$$4. \Sigma a(b - c) = \Sigma ab - \Sigma ac = \Sigma ab - \Sigma ac = 0.$$

5. $\Sigma bc(b - c) = -(b - c)(c - a)(a - b)$ olduğu gösterilebilir. Gösteriniz.

Eğer a, b, c ve x, y, z gibi üçlü iki grup sayı sözkonusu olursa, çembersel permutasyon her iki gruba ayrı ayrı uygulanır.

$$6. \Sigma a(x - y) = a(x - y) + b(y - z) + c(z - x).$$

$$7. \Sigma(a^2 + cy) = a^2 + cy + b^2 + az + c^2 + bx.$$

A, B, C ve D, E, F gibi üçlü iki grup nokta sözkonusu olduğunda da durum aynıdır:

$$8. \Sigma(|DB|^2 - |DC|^2) = |DB|^2 - |DC|^2 + |EC|^2 - |EA|^2 + |FA|^2 - |FB|^2.$$

a, b, c, d gibi dörtlü bir grup için

$$9. \Sigma ac = ac + bd + ca + db$$

eşitliği geçerlidir.

Uygulama 3. Bir üçgende iç açıortayların ayaklarından, ilgili kenara çizilen dikmelerin noktadaş olması için gerek ve yeter koşul üçgenin ikizkenar olmasıdır.

İSPAT: Üçgen ABC ve iç açıortaylar [AD], [BE], [CF] ve kenar uzunlukları a, b, c olsun.

$$|DB| = \frac{ac}{b+c}, |DC| = \frac{ab}{b+c}$$

olup

$$\Sigma (|DB|^2 - |DC|^2) = 0$$

yazarak a, b, c arasında bir bağıntı elde edelim.

$$|DB|^2 - |DC|^2 = \frac{a^2c^2}{(b+c)^2} - \frac{a^2b^2}{(b+c)^2}$$

$$= a^2 \frac{c-b}{c+b} \quad \text{den} \quad \Sigma a^2 \frac{c-b}{c+b} = 0$$

ve paydalardan kurtararak da

$$\Sigma a^2 (a + b)(a + c)(c - b) = 0$$

bulunur. $a + b + c = 2s$ yazarsak

$$a^2 (a + b)(a + c)(c - b)$$

$$= a^2 [a^2 + (b + c)a + bc](c - b)$$

$$= a^2 [a^2 + (2s - a)a + bc](c - b)$$

$$= 2sa^3 (c - b) + a^2bc (c - b)$$

eşitliğimiz

$$2s\Sigma a^3 (c - b) + abc \Sigma a(c - b) = 0$$

0

$$\Rightarrow \Sigma a^3 (b - c) = 0$$

olur. Toplamı şöyle çarpanlara ayırırız:

$$a^3 (b - c) + b^3 (c - a) + c^3 (a - b)$$

$$= a^3 (b - c) - a(b^3 - c^3) + bc(b^2 - c^2)$$

$$= (b - c)[a^3 - a(b^2 + bc + c^2) + bc(b + c)]$$

$$= (b - c)[a^3 - ab^2 - abc - ac^2 + b^2c + bc^2]$$

$$= (b - c)[-a(c^2 - a^2) + b^2(c - a) + bc(c - a)]$$

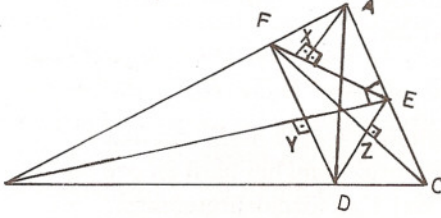
$$= (b - c)(c - a)[-a(c + a) + b^2 + bc]$$

$$= -(b - c)(c - a)(a - b)(a + b + c).$$

Bunu da sıfıra eşitlersek ispat bitirilmiş olur.

Uygulama 4. Dar açılı bir üçgende köşelerden ortak üçgenin² ilgili kenarlarına çizilen dikmeler noktadadır.

İSPAT: Üçgen ABC ve ortak üçgen DEF olsun. A'nın EF, B'nin FD, C'nin de DE üzerindeki dik izdüşümleri X, Y, Z olsun.



DEF üçgeninde

$$u = \Sigma(|XE|^2 - |XF|^2)$$

toplamının sıfır olduğunu görmek gerekir:

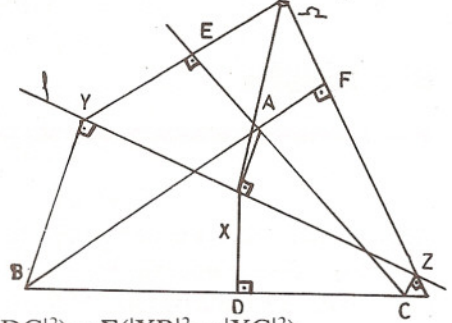
$$\begin{aligned} u &= \Sigma(|EA|^2 - |FA|^2) \\ &= \Sigma(|DC|^2 - |DB|^2) = 0 \end{aligned}$$

Uygulama 5. Tam bir ABC üçgeni ile bunun bir ℓ keseni verildiğinde A, B, C den ℓ ye çizilen dikmelerin X, Y, Z ayaklarından üçgenin karşılıklı kenarlarına çizilen dikmeler noktadadır (bir Ω noktasında kesişirler).

Bu Ω (omega) noktasına ℓ nin ABC ye göre ortopol'u deniliyor.

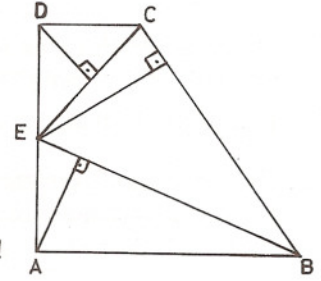
² Yüksekliklerin ayaklarını köşe kabul eden üçgen

İSPAT: Dikmelerin kenarlar üzerindeki ayakları D, E, F ise



$$\begin{aligned} \Sigma(|DB|^2 - |DC|^2) &= \Sigma(|XB|^2 - |XC|^2) \\ &= \Sigma(|BY|^2 + |YX|^2 - |CZ|^2 - |ZX|^2) \\ &= \Sigma(|BY|^2 - |CZ|^2) + \Sigma(|XY|^2 - |YZ|^2) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Uygulama 6. A ve D açıları dik olan bir yamukta [AD] nin ortası E ise A dan EB ye, D den EC ye ve E den BC ye çizilen dikmeler noktadadır.



İspatını kendiniz yapınız!

ÇÖZMECE KÖŞESİ

Farklı harfler 10 tabanına göre farklı rakamları gösterdiğine göre, aşağıdaki eşitlikleri sağlayan sayıları bulunuz

$$\left. \begin{array}{l} EKEİSLSOİ \times 7 \\ LBİAEİOKİ \times 11 \\ LAASÇKAEİ \times 13 \end{array} \right\} = \text{LOBAÇEVSKİ}$$

Hazırlayan: Med. Dr. Bahri Kaderoğlu
(Cevabı 21. sayfada)