

POKERİN MATEMATİĞİ

ALİ NESİN

Bu yazıda pokerin matematiğini öğreneceğiz. Poker, dört oyuncuyla ve yediliden asakadar olan 32 kâğıtla oynanır. Her oyuncuya önce beş kâğıt dağıtılır, sonra her oyuncu elindeki beş kâğıttan istediği kadarını değiştirebilir (isterse hiç değiştirmez). En iyi beş kâğıdı olan kazanır, ve oyun yinelenir. Elbet, “en iyi” sözcüğünün tanımlanması gerekir. Örneğin, beş kâğıt aynı renktense, diyelim hepsi maça (♠), bu “iyi” bir eldir. Aynı renkten beş kâğıda renk adı verilir. Bu yazıdaki amaçlarımızdan biri de pokerde ilk dağıtılan beş kâğıdın renk olma olasılığını hesaplamak. Önce ciddi matematik yapacağız.

Bir tanımla başlayalım. Eğer n bir doğal sayıysa, $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ sayısına eşittir. Örneğin,

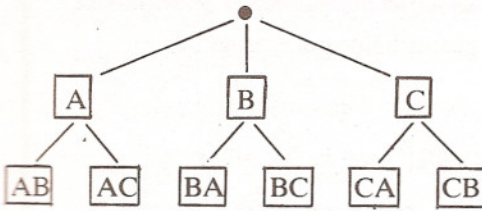
$$1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720$$

dir. $0! = 1$ olarak tanımlanır. Bu ilk bakışta pek doğal gelmeyen tanımın nedenini yazının ortalarında bulabilirsiniz.

Elimizde A, B ve C harfleri var, ve bu harflerden iki değişik harfli sözcük yapmak istiyoruz. Kaç sözcük yapabiliriz? Bu soruyu yanıtlamak için sözcükleri –abecé sırasına göre– sıralayalım.

AB, AC, BC, BA, CA, CB

Bu sözcüklerin oluşumunu şöyle de gösterebiliriz:



Önce ilk harfleri koyuyoruz: A, B ve C. Sonra ikinci harfleri: eğer ilk harfimiz A ise, ikinci harf için iki seçenek var: B ve C. Dolayısıyla A budağına iki dal ekliyoruz: B ve C dallarını. Demek ki toplam $3 \times 2 = 6$ sözcük yazabiliriz.

Şimdi bu soruyu genelleştirelim. Elimizde n değişik harf var:

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

ve bu n harften, r değişik harfli sözcükler üretmek istiyoruz (yani her harfi en çok bir kez kullanabiliriz). Kaç sözcük üretebiliriz? Yukarıdaki gibi ters dönmüş bir ağaç yapalım. Ağacın ilk budağından n dal çıkar: A_1 dalı, A_2 dalı, ... ve A_n dalı. Bunlar sözcüklerin ilk harfleri. Bu dalların ucuna $n - 1$ dal gelir (yani ikinci harfler). Örneğin, A_1 dalına, A_2, \dots, A_n dalları gelir, ve bu yeni dallar A_1A_2, \dots, A_1A_n sözcüklerini oluştururlar. Böylece $n \times (n - 1)$ dal elde etmiş oluruz. Demek ki $n \times (n - 1)$ iki harfli sözcüklerin sayısıdır. Sürdürelim ağacı. Bu $n \times (n - 1)$ dala şimdi $n - 2$ dal daha ekleyebiliriz. Örneğin, A_1A_2 dalına, A_3, \dots, A_n dallarını ekleyebiliriz. Bu yeni dalların her birinin ucuna 3 harfli sözcükler yazılır. Böylece $n \times (n - 1) \times (n - 2)$ tane üç harfli sözcük elde ederiz. Bu yöntemi sürdürsek, A_1, \dots, A_n harflerinden $n \times (n - 1) \times \dots \times (n - (r - 1))$ tane r harfli sözcük yazacağımızı görürüz. Bu sayı da $\frac{n!}{(n-r)!}$ sayısına eşittir. İlk teoremimizi kanıtladık:

TEOREM 1: Eğer $r \leq n$ iki doğal sayıysa, A_1, \dots, A_n harflerini en çok bir kez kullanarak

$\frac{n!}{(n-r)!}$ tane sözcük yazılır.

Biraz alıştırmaya yapalım:

1. SELİM sözcüğünün harfleriyle kaç tane üç harflik sözcük yazabiliriz?

Yukarıdaki teoremi uygulayarak

$$\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ sözcük buluruz.}$$

Başka bir soru: SELİM sözcüğünün harfleriyle kaç tane beş harflik sözcük yazılır?

Yine yukarıdaki teoremi uygulayalım:

$$\frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!}, \text{ ve } 0! = 1 \text{ eşitliğini kullanarak,}$$

$5! = 120$ tane beş harfli sözcük yazabileceğimizi görürüz.

2. MELEK sözcüğünün tüm harflerini kullanarak kaç tane (beş harfli elbet) sözcük yazabiliriz? Yukarıdaki teoremi doğrudan uygulayamayız, çünkü iki E harfi var. Önce iki E'yi ayıralım, ve ME_1LE_2K "sözcüğünün" tüm harflerini kullanarak kaç tane beş harfli sözcük yazabileceğimizi bulalım. Bu sorunun yanıtı yukarıdaki gibi $5! = 120$ 'dir. Bu 120 sözcüğün yarısında E_1 harfi, E_2 harfinden önce gelir; öbür yarısında E_2 harfi, E_1 harfinden önce gelir. Demek ki, MELEK sözcüğünün tüm harflerinden $120/2 = 60$ sözcük yazabiliriz.

3. Yukarıdaki alıştırmaya benzeyen, ama biraz daha zor olan bir alıştırma daha: KELEBEK sözcüğünün tüm harflerini kullanarak kaç sözcük yazabiliriz?

Yukarıdaki yöntemi kullanalım, ve önce $K_1E_1LE_2BE_3K_2$ sözcüğünü ele alalım. Bu sözcükten 7! sözcük üretebiliriz. Şimdi, $K_1 = K_2$ ve $E_1 = E_2 = E_3$ yapalım. Birinci eşitlik için 2'ye böleriz, ikinci eşitlik içinse $3! = 6$ 'ya. Demek ki, KELEBEK sözcüğünün harflerinin yerini değiştirerek $7!/2 \times 6 = 420$ sözcük yazabiliriz.

4. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sözcüklerinden

$$\frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

tane üç harfli sözcük yazabiliriz.

Şimdi yeni bir soru soralım. Elimizde n öğesi olan bir küme var:

$$A = \{A_1, \dots, A_n\}.$$

$r \leq n$, n 'den küçük bir doğal sayı olsun. A kümesinin kaç tane r öğesi olan altkümesi vardır? Bu sayıyı hesaplayacağız. Bu sayıya (her neyse) $\binom{n}{r}$ adını verelim.

Örnek: $n = 5$ ve $r = 3$ olsun. $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ kümesinin 3 öğeli alt-kümeleini bulalım:

$$\{A_1, A_2, A_3\}$$

$$\{A_1, A_2, A_4\}$$

$$\{A_1, A_2, A_5\}$$

$$\{A_1, A_3, A_4\}$$

$$\{A_1, A_3, A_5\}$$

$$\{A_1, A_4, A_3\}$$

$$\{A_2, A_3, A_4\}$$

$$\{A_2, A_3, A_5\}$$

$$\{A_2, A_4, A_5\}$$

$$\{A_3, A_4, A_5\}$$

Demek ki $\binom{5}{3} = 10$ 'dur. Bu sayının da $\frac{60}{3!}$

olduğuna dikkatinizi çekerim. Bu rasgele bir eşitlik değildir, ve aşağıda bu eşitliğin nedenini göreceksiniz.

Birinci soruyla arada şu ayrım var: birinci soruda $A_1A_2A_3$ ve $A_1A_3A_2$ sözcüklerini ayrı ayrı sayıyorduk. Oysa bu sorumuzda, sözcüklere değil de harflerden oluşan kümelere bakıyoruz. $A_1A_2A_3$ ve $A_1A_3A_2$ sözcüklerinin herbirinin harflerinden $\{A_1, A_2, A_3\}$ kümesi oluşur. Bunun gibi,

$$\left. \begin{array}{l} A_1A_2A_3 \\ A_1A_3A_2 \\ A_2A_1A_3 \\ A_2A_3A_1 \\ A_3A_1A_2 \\ A_3A_2A_1 \end{array} \right\} \text{ sözcükleri } \{A_1, A_2, A_3\} \text{ kümesini oluştururlar.}$$

Yukarıdaki örnekten yararlanacağız soruyu yanıtlamak için. Birinci teoreme göre, r harfli

sözcük sayısı $\frac{n!}{(n-r)!}$ 'dir. Bu sözcüklerden kaç

tanenin aynı kümeyi verdiğini hesaplayalım.

Yine birinci teoreme göre r harfle yazılan $r!$

sözcük olduğuna göre, $\frac{n!}{(n-r)!}$ sözcüklerden $r!$

tanesi aynı kümeyi veriyor. Demek ki

$$\binom{n}{r} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

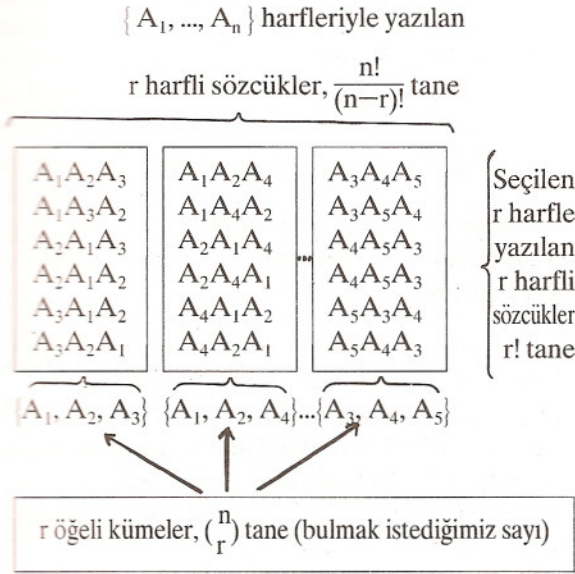
dir.

TEOREM 2. n ögesi olan bir kümenin, r ögelik alt-kümelerinin sayısı

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

dür.

Bu teoremin kanıtının, $r = 3, n = 5$ için, bir resmini yapalım:



Toplam poker eli sayısı. Şimdi toplam poker eli sayısını hesaplayabiliriz. 32 kâğıttan kaç tane 5 kâğıtlık el çıkar? Yani 32 ögelik bir kümenin kaç tane 5 ögelik alt kümesi vardır? Teorem 2'ye göre,

$$\binom{32}{5} = \frac{32!}{27!5!} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 201 \cdot 376$$

tane, yani ikiyüzbinden fazla poker eli vardır.

Renk sayısı. Şimdi de kaç tane "renk" eli olduğunu hesaplayalım. Önce kaç tane maça (\spadesuit) eli olduğunu bulalım. Sekiz tane maça var. Bu sekiz maçadan, beş tane seçeceğiz. Teorem 2'ye göre

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$$

tane salt maça olan el vardır. Toplam dört renk olduğundan ($\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit$), bu sayıyı dörtle çarparsak, toplam renk eli sayısını buluruz:

$$56 \times 4 = 224.$$

Ama bu sayıdan, toplam "floş" (aynı renkten ve sürekli kâğıtlar) sayısını çıkarmalıyız. Maçadan floşlar, asla (A, 7, 8, 9, 10), yediliyle, sekizliyle, dokuzluyla ya da onluyla (10, J, Q, K, A) başlayabilir. Demek maçadan beş tane floş var, ve toplam floş sayısı $5 \times 4 = 20$. Böylece, gerçek renk sayısı,

$$224 - 20 = 204$$

dür.

Olasılık olarak düşünersek, elden renk gelme olasılığı

$$\frac{204}{201.376} \approx 0,001013$$

dür. yani aşağı yukarı binde bir.

Kare sayısı. Elden kare gelme, yani beş kâğıttan dördünün aynı sayı olma olasılığını bulalım. Önce dört tane ası olan el sayısını bulalım. Dört tane asın yanına gelebilecek kâğıt sayısı $32 - 4 = 28$ 'dir. Demek 28 tane dört aslı el var. Toplam sekiz tür kâğıt olduğundan,

$$28 \times 8 = 224$$

tane kare el vardır. Bu sayı, renk sayısından biraz daha fazla olduğundan, renk kareyi yener diye düşünebilirsiniz. Nitekim, eğer pokerde kâğıt değiştirme olmasaydı, düşündüğümüz gibi olurdu. Ama kâğıt değiştirme olasılıkları da değiştirir. Örneğin, üç ası olan, öbür iki kâğıdını değiştirerek, dört as olma olasılığını artırır. Bunun gibi eline dört maça gelen, beşinci kâğıdını değiştirerek, renk olasılığını artırır. Yani poker oyununun sonundaki olasılıklar, ilk beş kâğıdın olasılıklarından farklıdır.

"Ful" sayısı. Eğer bir elde bir türden üç tane, bir başka türden iki tane kâğıt varsa, o ele "ful" denir. Örneğin, üç as ve iki papazdan oluşan bir el fuldür. Elin ful olma olasılığını bulalım. Bu biraz daha zor. Önce elden üç as, iki papaz gelme olasılığını bulalım. Dört astan üçünü seçeceğiz, yani dört ögelik bir kümeden üç ögelik bir küme seçeceğiz. Teorem 2'ye göre

$$\binom{4}{3} = 4$$

seçeneğimiz var aslar için. Şimdi de dört papazdan ikisini seçeceğiz. Yine Teorem 2'ye göre

$$\binom{4}{2} = 6$$

seçeneğimiz var. Demek ki toplam

$$4 \times 6 = 24$$

tane üç as ve iki papazlı el var. Üç papaz ve iki aslı el de 24 tane. Yani as ve papazlarla

$$24 + 24 = 48$$

tane ful el vardır. Bu hesaplar salt as ve papazlar için değil, tüm iki tür kâğıtlar için de geçerli.

Örneğin yedililer ve dokuzlularla da 48 tane ful el vardır. Kaç tane iki tür kâğıt var? Toplam sekiz tür var. Bunlardan iki tür seçeceğiz.

Teorem 2'ye göre

$$\binom{8}{2} = 28$$

tane iki tür var. Demek ki toplam ful el sayısı

$$48 \times 28 = 1344$$

dür.

“Üç” sayısı. Bir elde üç tane aynı kâğıt varsa, o ele “üç” adı verilir. Ama kare ve fuller üç sayılmaz. Üç sayısını hesaplayalım. Önce üç aslı üç sayısını bulalım. Teorem 2'ye göre

$$\binom{4}{3} = 4$$

çeşit üç as seçebiliriz. Bu üç asın yanına iki kâğıt gelecek, ama herhangi iki kâğıt değil: hiçbiri as olmayacak ve aynı kâğıt olmayacaklar. As dışında $32 - 4 = 28$ kâğıt var. Bunlardan iki

tane seçelim: $\binom{28}{2} = 378$ tane seçenek var.

Ama bu seçeneklerden bazıları iki tane aynı tür kâğıttan oluşuyor. Bu sayıyı bulup 378'den çıkartalım. Kaç tane iki papaz seçebiliriz?

$\binom{4}{2} = 6$ tane. As dışında yedi tür kâğıt var.

Demek ki, 378 seçenektan $6 \times 67 = 42$ tanesi iki tane aynı tür kâğıttan oluşuyor. Dolayısıyla, seçilen üç asın yanına,

$$378 - 42 = 336$$

tane iki kâğıtlık el koyabiliriz. Dört tane üç as seçilebildiğinden, aslı üç sayısı

$$336 \times 4 = 1.344$$

dür. Bu hesap as dışındaki öbür kâğıtlar için de geçerli: yani “üç” el sayısı

$$1344 \times 8 = 10.752$$

dir.

Öbür olasılık hesaplarını okura alıştırmaya bırakıyoruz. Yanıtları aşağıdaki dizelgede bulacaksınız. Matematiksel şeytanınız bol olsun.

El türü	El sayısı	Bin üzerine olasılığı (± 0, 005)
Floş	20	0,10
Renk	204	1,01
Kare	224	1,11
Ful	1,344	6,67
Kent ¹	5.100	25,33
Üç	9,792	53,39
Döper ²	24.192	120,13
Per ³	107.520	533,93

¹ Bir elin kâğıtları peşpeşe, örneğin 7, 8, 9, 10, V ise, o ele “kent” denir. Kentte renkler dikkate alınmaz.

² Bir elde iki farklı çift varsa, o ele “döper” denir.

³ Bir elde tek bir çift, örneğin A, A varsa o ele “per” denir.