Geçişken Olmayan Zarlar Hakkında Teorem

FARAMAZ MAKSUDOV, ELDER HACILAROV

Geçişken olmayan oyunlar hakkında birçok ilginç problem ve paradokslar vardır. Bu yazıda biz böyle oyunların bir sınıfını inceleyerek size benzer oyunları oluşturmayı öğreteceğiz.

Oyunu anlatmadan önce bazı basit olayların olasılığını hesaplamayı öğrenelim. Örneğin adi bir oyun zarımız olsun. Bu zarı attığımızda 1 veya 6 sayısından hangisi daha sık gelebilir? Aşikardır ki, zarımız mutlak olarak simetrikse bu sayılardan birine diğerine göre üstünlük vermemize gerek yoktur. Buna göre de her sayının gelme olasılığını aynı olarak kabul etmek doğru olur.

Böylece zar atıldığında altı farklı, eşit olasılıklı hal vardır. Buna göre herhangi bir sayının gelme olasılığı 1/6'ye eşittir. Başka bir deyişle 1 sayısı 6 farklı halden ancak birinde gelebilir.

Eğer biraz daha karmaşık bir olayın olasılığını, örneğin {1,2} kümesinden bir sayının gelmesi olasılığını hesaplamak istersek, önce bu olayın hangi hallerde olabileceğini (bu durumda iki halde) buluruz ve sonra da bu sayıyı tüm hallerin sayısına böleriz. Kısaca 1 ya da 2 sayılarından birinin gelme olasılığı 2/6 = 1/3'tür Okuyucu {1,2,5,6} sayılarından birinin gelme olasılığını kendisi hesaplayabilir.

Ele aldığımız soruyu biraz daha zorlaştıralım ve tam simetrik A ve B diyeceğimiz oyun zarlarını aynı anda attığımızda neler olabileceğini düşünelim. Her iki zar da altı farklı şeklide gelebileceğinden. A ve B aynı anda atıldığında ... hallerin sayısı $6^2 = 36$ olur. Zarlarımız ...ından her halin olasılığı eşittir. ...bir α olayının olasılığını ...bu 36 halden kaçında α ...ğını bulup bu sayıyı 36'ya ...ise α olayının olasılığıdır.

Örnek 1: A ve B zarlarının birlikte atılması sonuçu toplamının 5'e eşit olması olasılığı kaçtır?

Çözüm: Toplamın 5'e eşit olmasının hangi durumlarda olabileceğini görelim. Şekil 1'deki tabloya bakarsak istenilen olayın dört halde olabileceğini buluruz. Böylece toplamın 5 olması olasılığı 4/36 = 1/9 dur.

Soru 1: A ve B zarları birlikte atılınca toplamın hangi sayı olmasının olasılığı en yüksektir?

Örnek 2: A zarında gelen sayının B'de gelenden büyük olma olasılığı kaçtır?

Çözüm: İlkin bu olayın hangi hallerde olabileceğini görelim.

1. Eğer A zarında 6 sayısı gelirse ve B de de {1,2,3,4,5} sayılarından birisi gelirse bu 5 halde istediğimiz olay meydana gelmiş olur.

2. Eğer A da 5 ve B de {1,2,3,4} sayılarından biri gelirse bu 4 halde istenilen olay meydana gelmiş olur.

Bu düşünce biçimini sürdürerek A da 4 gelmesi durumunda 3 halde, A da 3 gelmesi durumunda 2 halde ve A da 2 gelmesi durumunda da 1 halde beklenen olay olur, A zarı 1 gelirse istenilen asla olmaz. Böylece istediğimiz olay 5+4+3+2+1=15 halde meydana gelebilir. Olasılığı ise 15/36 = 2/15 dir.

Bu uzun ve can sıkıcı hesapları tam olarak verdik ki siz de benzer hesapları kendiniz yapabilesiniz.

Soru 2 : A zarında sayının B de gelenden büyük veya eşit olma olasılığını hesaplayınız.

2. Oyunun Tanıtımı.

Bu bölümde yüzlerinde "1,2,3,4,5,6" yazılı adi oyun zarlarından farklı olarak, üzerinde değişik sayılar yazılmış oyun zarlarını ele alacağız. Böyle zarlara standart olmayan zarlar diyelim.

Artık oyunumuzu tanıtabiliriz. A, B ve C diye üç tane standart olmayan zarımız olsun. A zarının yüzlerinde {1,3,4,14,17,18}, B'nin yüzlerinde {2,9,10,11,12,13} ve C'ninkilerdeyse {5,6,7,8,15,16} sayıları var. İki oyuncu aşağıdaki oyunu oynarlar.

1. oyuncu istediği zarı seçer. 2. oyuncu da kalan iki zardan birini seçer. Her oyuncu istediği zarı atar. Yüksek sayıyı atan oyuncu oyunu kazanır.

Sizce hangi oyuncunun kazanma olasılığı daha yüksektir? İlk bakıştka üstünlüğün 1. oyuncuda olduğu sanılabilir. Çünkü 1. oyuncu ilk seçimi yaptığı için en iyi zarı seçebilir. Böylece kazanma olasılığı en az 1/2 olmasını garanti eder. Ancak bu düşünüş şekli doğru değildir. Gelin oyunumuzu ayrıtılı olarak ele alalım.

Hangi zarın, A veya B'nin elverişli olduğunu anlamaya çalışalım. Bu iki zarı birlikte atarsak 36 eşit olası hal olduğunu biliyoruz. Şimdi bu 36 halden kaçında A zarının kanzandığını hesaplayalım; eğer A zarında 14,17 veya 18 gelirse B'de ne gelirse gelsin A kazanır. Bu size 3.6=18 hal verir. Eğer A zarında 3 veya 4 gelirse, A ancak 13'te 2 gelirse kazanır. Bu da bize 2 kazanma biçimi daha verir. A'da 1 gelirse, A mutlaka kaybeder. Böylece A'nın B'ye karşı kazanma olasılığı 20/36=5/9'dır ve 5/9>1/2 olduğundan A zarı B'den üstündür.

Soru 3: Aynı şekilde A ile C'yi, sonra da B ile C'yi karşılaştırın.

Eğer bu soruyu doğru yanıtlamışsanız, çelişkili bir durumla karşılaşacaksınız. A zarı B zarından 20 halde, B zarı C zarından 20 halde, ve C'de A zarından gene 20 halde üstündür. Başka bir deyişle, A zarı B'den, B zarı C'den C zarı da A'dan elverişlidir. Herhangi iki zarı düşünürsek biri diğerinden üstündür ve üstün olanın kazanma olasılığı 20/36 = 5/9 dur; ancak en elverişli zar yoktur.

Şimdi oyuna dönelim: 1. oyuncunun seçtiği zardan bağımsız olarak, 2. oyuncu daima daha elverişli zar seçebilir ve kendine 5/9 olasılığıyle kazanma şansı sağlayabilir (Şekil 2). Yani, eğer 1. oyuncu A'yı seçerse 2. oyuncu C'yi, 1. oyuncu B'yi seçerse 2. oyuncu A'yı seçer.

Artık geçişkenliğin anlamını verebiliriz. Bilindiği gibi, a., b, c üç gerçel sayıysa, $a > b$ ve $b > c$ eşitsizlikleri $a > c$ eşitsizliğini gerektirir. Bu özelliğe *geçişkenlik ilişkisi* deriz. Yukarıda anlattığımız oyunda gördük ki, A zarı B'den ve B zarı C'den elverişlidir; ancak A zarı C'den elverişli değildir. Aksine C zarı A'dan elverişlidir.

Tanıttığımız oyunda elverişlilik geçişken değil. Bu tür oyunlara geçişken olmayan oyunlar denir. Her standart olmayan zarlar geçişken olmayan bir oyun vermez. Örneğin, A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, B= {7, 8, 9, 10, 11, 12} ve C = {13, 14, 15, 16, 17, 18} olsa, C zarı en elverişlidir. Gerçekte, geçişken olmayan oyunları oluşturmak pek kolay değildir. Bundan sonraki bölümü okursanız bunu siz de göreceksiniz.

3. Esas Teorem

Durumu genelleştirelim. Bu bölümde 6 yüzlü değil de, daha genel olarak n yüzlü ($n \geq 3$) zarları ele alacağız. Böyle zarlara n-zar diyelim.

Teorem: Yüzlerinde 1'den 3n'ye kadar sayıların tekrarlanmayarak yer aldığı A, B ve C gibi n-zarlarımız olsun. A'nın yüzlerinde $\{a_1, \ldots, a_n\}$, B'nin yüzlerinde $\{c_1, \ldots, c_n\}$ sayıları yazılmış olsun.

A'nın B'ye, B'nin C'ye ve C'nin A'ya eş olasılıklarla üstün olması için yeterli ve gerekli koşul

$$\sum^{n} a_i = \sum^{n} b_i = \sum^{n} c_i = \frac{n(3n+1)}{2}$$

olmasıdır.

İspattan önce teoremi biraz irdeleyelim. 2. bölümdeki oyunda zarlar A,B ve C üzerindeki sayıların toplamı her zar için $\frac{6(19)}{2} = 57$ 'ye eşittir. Bu teoremden yararlanarak, farklı zarlarla aynı oyunu kurabiliriz. Bunun için 1'den 18'e kadar tamsayıları öyle üç kümeye ayıralım ki, her kümedeki sayıların toplamı 57'ye eşit olsun. Oyunumuzda A'nın B'ye, B'nin C'ye ve C'nin de A'ya karşı kazanma olasılıkları eşşittir. Bu olasılığa P dersek, teoremimiz p = 1/2 halini de kapsar. Tabii bu durumda A, B ve C zarları eşit derecede elverişlidir.

Soru 4: Eğer $p< \frac{1}{2}$ ise, aldığımız zarlarda geçişkenlik özelliği olmayabilir mi? Ne için?

İlk olarak, teoremin ispatında kullanacağımız bir yardımcı sonucu ele alalım.

Yardımcı Sonuç: $1\geq a_1<a_2<...<a_n \geq 3n$ tam sayılarında kurulan $A = \{a_1,...,a_n\}$ kümesi için

$$S(A) = \sum^{n} \sum_{\alpha\in [1,3n]\setminus A} \operatorname{sgn} (Q_i-\alpha) = 2\sum^{n} a_i - n(3n + 1)$$

olur. Burada [1,3] ile {1,2,3,4,...,3n} kümesini ve sgn ile de

$$\operatorname{sgn} x = \begin{vmatrix} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{vmatrix}$$

fonksiyonunu gösteriyoruz.
A kümesinde bir a_i öğesi seçelim ve

$$S_i = \sum_{\alpha e[1,3n]\setminus A} \operatorname{sgn} (a_i-\alpha)$$

toplamını hesaplayalım. S_i sayısı $[1,3n]\setminus A$ kümesinde a_i'den küçük olan öğelerin sayısından a_i'den büyük olan $[1/3n]\setminus A$ kümesi öğelerinin sayısını çıkarmakla elde edilir. a_i'den küçük tamsayılar $(a_i - 1)$ tanedir. Ancak bunlaradan (i-1) tanesi, $a_1...a_{i-1}$ sayıları A kümesindedir. Böylelikle $[1,3n]\setminus A$ kümesinde a-i'den küçük $(a_i-1) - (i-1) = a_i-i$ tane sayı vardır. Aynı şekilde $[1,3n]\setminus A$ kümesinde a_i'den büyük $(3n-a_i)-(n-i) = 2n-a_i +i$ tane sayı vardır. Demek ki

$$S_i = (a_i - i) - (2n - a_i + i) = 2 (a_i - i - n)$$

olur. Burada S(A) sayısını şöyle hesaplarız:

$$S(A) = \sum^{n} S_i = 2\sum^{n} (a_i - i - n)$$

$$S(A) = \sum^{n} S_i = 2\sum_{i=1}^{n} (a_i - i - n) = 2\sum_{n}^{n} a_i - 2\sum^{n} i - 2r$$

$= 2\sum$ [illegible] $-n(3n-1)$

Teoremin ispatını geçelim. Önce A'nın B'ye, B'nin C'ye ve C'nin de A'ya karşı kazanma olasılıklarınn eşit olduğunu varsayalım. A zarı C'ye karşı kaç halde kaybederse, B'ye karşı da o kadar halde kazanır. Aynı şekilde A zarı C'ye karşı kaç halde kazanırsa, B'ye karşı da o kadar halde kaybeder. $B\cup C = [1,3n]\setminus A$ olduğu için, buradan S(A)=0 elde edilir. Böylece yardımcı sonuçtan

$$\sum^{n} a_i = \frac{n(3n+1)}{2}$$

eşitliği bulunur. Durumun simetrik olması, bize

$$\sum^{n} b_i = \sum^{n} c_i = \frac{n(3n+1)}{2}$$

eşitliklerini verir.

Tersine,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i-1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} c_i = \frac{n(3n+1)}{2}$$

olduğunu varsayalım. Yardımcı sonuçtan S(A) = S(B) = S(C) = 0 elde ederiz. A zarı B'ye karşı n^2-halden m-inde kazansın, (n^2-m) halde ise kaybetsin. S(A) = 0 olduğundan, A zarının C'ye karşı m-halde kaybettiğini ve (n^2-m) halde de kazandığını buluruz. Başka bir deyişle A'nın B'ye karşı ve C'nin de A'ya karşı kazanma olasılıkları $p=m/n^2$'dir. Öte yandan, C ile A'yı ve C ile B'yi karşılaştırırsak, sonuçta A zarının B'ye, B zarının C'ye ve C'nin de A'ya karşı kazanma olasılıklarının $p=m/n^2$ olduğunu görürüz. Böylece teoremin ispatı bitmiş olur.

Bu ispatı okuyup anlayan okuyucuya aşağıdaki ilginç problemi sunarız.

Soru 5: İkinci bölümde p = 5/9 olan bir 6-zar oyununu öğrendik. p>5/9 halinde geçişken olmayan 6-zar irdeleyin.

Son üç cümle azari dilinde aşağıdaki gibidir.

Teoremin isbatini ohuyub başa düşän ohucuya aşagidaki maragli mäsäläni tägdim edirik.

Mäsälä 5. 2-ci bänddä biz $p = \frac{5}{9}$ olmagla geyri-tranzitiv 6-zär yigimini öyrändik. $p > \frac{5}{9}$ olmagla geyri-tranzitiv 6-zär yigimiki fikirläşin.