

# SEÇİM VE MATEMATİK-1

## KİSMİ SIRALAMA BAĞINTILARI

HALİL İBRAHİM KARAKAŞ

**B**ir toplumun her bireyinin, Çeşitli konularda belli tercihleri vardır. Birey, önceden var olan veya kendisine sunulmuş olan seçenekler arasından kendisi için veya başkası için seçim yapar; yapılan bu seçime göre, bireyin veya başkalarının yaşantıları etkilenir. Çoğu zaman bir toplumun, bütün olarak, bir konuda alacağı karar ve göstereceği etkinlikler, toplumun bireylerinin o konuda yapacakları seçim ya da tercihlerle belirlenir. Başka bir deyimle, toplumun bir konudaki seçimi, bireylerin o konudaki seçimleriyle ortaya çıkar.

Toplumun ve bireylerin yarınları vey a gelecekleri, bu gün yaptıkları seçimlerle veya tercihlerle biçimlenir. Bu nedenle, seçim kavramı ve seçme eylemi üzerinde özenle düşünmekte, bunları irdelemekte, bir seçimin arzu edilen özelliklerinin neler olması gerektiğini araştırmakta yarar vardır.

Önce, seçme eylemi nedir, nasıl oluşur onu belirleyelim. Bir seçme eyleminden veya seçim olayından söz edebilmemiz için, her şeyden önce, bir seçenekler kümesi bulunmalıdır. Örneğin, konuk olduğunuz bir yerde size: "Ne içersiniz? Çay, kahve ve Kola var." diye sorulursa, seçenekler kümesi

{çay, kahve, kola}

dır. Seçiminizi bu kümeden yaparsınız. Bu basit örnekte de görüldüğü üzere, seçim olayı, seçenekler kümesinin elemanları birbirleriyle karşılaştırılıp tercihlerde bulunarak gerçekleştirilir.

Yukarıdaki örnekte, ne içeceğinizi bildirirken, seçenekler kümesindeki içecekleri birbiri ile karşılaştırıp biri için tercihte bulunursunuz (veya bu eylemi daha önceleri yapmışsınızdır) örnek olarak, (çay, kahve) ikilisinden biri veya hiçbiri lehine tercihte bulunursunuz. Bunu (çay, kola)

ve (kola, kahve) ikilileri için tekrarlırsınız. Yapacağınız seçimin, en azından kendi içinde tutarlı olması için, seçenekler kümesinin elemanlarını ikişer ikişer ele alıp tercihlerde bulunurken bazı kurallara uymanız gerekir. Örneğin, (çay, kahve) ikilisinden kahveyi tercih ediyorsanız (kahve, çay) ikilisinden de kahveyi tercih etmeniz gerekir (Ters-Simetri Özelliği). Eğer, (çay, kahve) den kahveyi (kahve, kola) dan kolayı tercih ediyorsanız, (çay, kola) dan hangisini tercih etmeniz gerekir? Kuşkusuz kolayı! (Geçişme Özelliği).

Konuyu matematiksel bir zemine çekmek için seçenekler kümesinden oluşturacağımız bir ikilinin her iki bileşeninin de aynı olması durumunda, o ikiliyi oluşturan elemanın tercih edileceğini varsayalım.(Yansıma Özelliği). Örneğin, (çay, çay) ikilisinden, çay tercih edilecektir.

Bu noktada bir yanlış anlama olasılığını ortadan kaldırmak için, bileşenleri farklı olan herhangi bir ikilinin hiç birinin de tercih edilmeyebileceğini belirtmeyiz. Somut bir örnekle, (çay, kola) ikilisinden hiç birini sevmeyebilirsiniz.

Şimdi, yukarıda söylediklerimizi matematiksel dile aktarmağa çalışalım. Bir seçim olayında, seçenekler kümesi S ise, yapılan seçim, S nin elemanlarından oluşan bazı ikililer, yani S nin kendisi ile Kartezyen çarpımı, SxS nin bir altkümesine karşılık gelmektedir. Bu altküme,

$$K = \{(a,b) \in S \times S : a \text{ b ye tercih ediliyor}\}$$

biçiminde tanımlanabilir.

İçecek örneğimize geri dönelim: çay yerine ç, kahve yerine k ve kola yerine k yazarak

$$K_1 = \{(ç,ç), (k, k), (k, ç), (ç, k), (ç, k)\}$$

kümesini ele alalım. Bu küme,  $S = \{\text{ç, k, \text{!}}\}$  olmak üzere  $S \times S$  nin bir altkümesidir ve çay, kahve ve koladan çay tercih edildiğini göstermektedir.

Seçim olayında seçenekler kümesinden ikililer oluşturulurken, matematiksel deyimle,  $S \times S$  nin  $K$  altkümesi oluşturulurken bazı kurallara uyulması gerektiğini belirtmiştik. Bu kurallar,

1. Her  $a \in S$  için  $(a, a) \in K$  (Yansıma Kuralı)
2.  $a, b \in S$  ;  $(a,b) \in K$  ve  $(b,a) \in K \Rightarrow a = b$   
(Ters-Simetri Kuralı)
3.  $a, b, c \in S$ ;  $(a,b) \in K$ ,  $(b, c) \in K \Rightarrow (a, c) \in K$   
(Geçişme Kuralı)

biçiminde ifade edilebilir. Böylece, bir seçenek kümesi üzerinde bir seçim yapmak, aşağıda verilen tanımlar çerçevesinde, bu seçenekler kümesi içinde bir *kısmi sıralama bağıntısı* oluşturmak demektir.

**Tanımlar.** Bir  $S$  kümesi verilmiş olsun.

- 1)  $S \times S$  nin her bir  $K$  altkümesine  $S$  içinde bir *bağıntı* denir.
- 2)  $K$ ,  $S$  içinde bir bağıntı ve
  - i) her  $s \in S$  için  $(s, s) \in K$  (Yansıma Özelliği)
  - ii)  $s, t \in S$ ;  $(s,t) \in K$ ,  $(t, s) \in K \Rightarrow s=t$   
(Ters-simetri Özelliği)
  - iii)  $s, t, u \in S$ ;  $(s,t) \in K$ ,  $(t, u) \in K \Rightarrow (s, u) \in K$   
(Geçişme Özelliği)

ise,  $K$  ye  $S$  içinde bir *kısmi sıralama bağıntısı* (kısaltılmış olarak *kısıba*) denir.

- 3) İçinde bir *kısıba* tanımlanmış bir kümeye *kısmi sıralanmış küme* (kısaltılmış olarak,  $ksk$ ) denir.

*Seçim* sözcüğü çoğunlukla *matematik* sözcüğünden başka sözcükleri akla getirir: *demokrasi* gibi. Ancak, yukarıda sunulanlardan görüldüğü üzere, her hangi bir konuda bir seçim yapmak, belli bir küme içinde bir *kısıba* oluşturmak demektir. Bu, seçim sözcüğüne matematiksel bir anlam vermektedir. Sonuç olarak, bir seçimin *arzu edilen* özellikleri nelerdir, bu sorusunu araştırırken, o seçimin *matematiksel* kümesi içindeki *kısıbaları*

incelememiz gerektiğini görüyoruz.

Bu yazımızın kalan kısmında,  $ksk$  lerle ilgili gösterimleri belirleyecek ve bazı özel  $ksk$  lerden söz edeceğiz,  $ksk$  veya *kısıbaların* özelliklerini Matematik Dünyası'nın başka sayılarında ele alacağız.

Kuramsal olarak sonsuz  $ksk$  lerden söz edilebilir, ancak biz seçimle ilgili tartışmalarımızda sadece sonlu  $ksk$  leri ele alacağız; başka bir deyimle, ele aldığımız seçim olayında seçenekler kümesi sonlu olacaktır.

$S$  bir  $ksk$  olsun.  $S$  içindeki *kısıba*  $y \geq$  ile gösterelim ve  $a, b \in S$ ,  $(a, b) \in \geq$  olması durumunda  $a \geq b$  yazalım.  $a \geq b$  yi " $a$ ,  $b$  ye tercih edilebilmektedir" diye okuyabiliriz. Eğer  $a \geq b$ , fakat  $a \neq b$  ise  $a > b$  yazacağız.  $c, d \in S$  için  $c \geq d$  ve  $c \not\geq d$  yazılımları, sırasıyla,

$c \geq d$  ve  $c > d$  olmadığını gösterirler.

Bir  $ksk$ ,  $S$ , nin her hangi iki elemanı  $a$  ve  $b$  için

$$a > b, a = b, b > a$$

dan bir ve yalnız biri geçerli ise, bu takdirde  $S$  ye *tümünden sıralanmış küme* (kısaltılmış olarak,  $tsk$ ) ve  $\geq$  de  $S$  içinde bir *tümünden sıralama bağıntısı* (kısaltılmış olarak *tüsüba*) denir. Beraberlik durumunda kazananın bazı puanlama yöntemleri veya kura ile belirlediği turnuvalar  $tsk$  ye örnek oluştururlar.

Berberliğe izin verilen bir turnuva,  $tsk$  olmasa da ilginç bir  $ksk$  örneği oluşturur. Bu tür bir turnuvada iki oyuncu ya berabere kalmıştır ya da biri diğerine üstünlük sağlamıştır. Kısmi sıralanmış küme gösterimiyle,  $a$  ve  $b$  nin berabere kalmaları,

" $a \not\geq b$  ve  $b \not\geq a$ " yazılarak ifade edilebilir.

$S$  bir  $ksk$ ;  $a, b \in S$ ,  $a \not\geq b$  ve  $b \not\geq a$  ise, bu takdirde  $a$  ve  $b$  *ayrimsızdır* denir ve  $a \sim b$  yazılır. Ayrimsızlık,  $S$  içinde yeni bir bağıntı verir. Bu bağıntı için, daima

her  $a \in S$  için  $a \sim a$  (Yansıma özelliği),

$a, b \in S$ ,  $a \sim b \Rightarrow b \sim a$  (Simetri özelliği)

özellikleri geçerlidir. Eğer ek olarak,

$a, b, c \in S, a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$   
(Geçişme özelliği)

ise, bu takdirde  $S$  ye zayıf sıralanmış küme (kısaltılmış olarak, zsk) ve  $\geq e$  de  $S$  içinde bir zayıf sıralama bağıntısı (kısaltılmış olarak zasıba) denir.

Her tsk bir zsk dır. zsk için bir başka örnek, satın alınacak bir eşyanın sadece fiyatına göre seçilmesidir.

Kısmi sıralanmış kümeler üzerine bazı ek koşullar öne sürerek değişik ksk örnekleri elde edilebilir. Bunlar değişik seçim yöntemlerine karşılık gelirler.

$S$  bir ksk ve  $a, b \in S$  olmak üzere, eğer  $c > a$  olacak biçimde hiç  $c \in S$  yoksa,  $a$  ya  $S$  nin bir *maksimal* (büyükçe) elemanı denir. Benzer biçimde,  $S$  nin  $b > s$  olan hiç  $s$  elemanı yoksa,  $b$  ye  $S$  nin bir *minimal* (küçükçe) elemanı denir. Çoğu seçimlerde önemli olan, seçenekler kümesi  $S$  nin büyükçe veya küçükçe elemanlarını belirlemektir. Bunun yanında, her seçim olayında, ya da her ksk de, seçenekleri düzeylerine göre ayırmak mümkündür.

$S$  içinde  $a_0 > a_1 > \dots > a_k$  biçiminde bir diziyeye *uzunluğu*  $k$  olan bir dizi denir. Eğer  $a \in S$  için

$$a_0 > a_1 > \dots > a_{k-1} > a_k > a$$

biçiminde bir dizi varsa ve bu tür her dizinin uzunluğu  $k$  dan küçük veya  $k$  ya eşit ise, bu takdirde  $a$  elemanı *k-inci düzeyde* bir elemandır denir.

$a \in S$ ,  $k$  ıncı düzeyde bir eleman ve

$$a_0 > a_1 > \dots > a_{k-1} = a$$

$a \in S$ ,  $k$ -ıncı düzeyde bir eleman ve

$$a_0 > a_1 > \dots > a_k = a$$

ise,  $a_0$ ,  $S$  nin bir büyükçe elemanıdır ve her

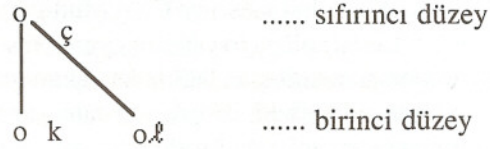
$i = 0, \dots, k-1$  için  $a_i > s > a_{i+1}$  olacak biçimde hiç  $s \in S$  yoktur.

$S$  nin toplam olarak  $r$  elemanı varsa,  $S$  nin en çok  $r$ -inci düzeyde elemanları vardır. Her

$k = 0, 1, \dots, r-1$  için  $S$  nin  $k$ -inci düzeyde

elemanlarını belirlediğimizi ve bu elemanları, sıfırncı düzeyde olanlardan başlamak üzere, her düzeydeki elemanlar yatay bir sıra oluşturacak biçimde yukarıdan aşağıya doğru sıraladığımızı düşünelim. Ayrıca,  $a > b$  ise  $a$  ile  $b$  yi bir doğru parçası ile birleştirelim. Bu yolla elde edilen çizelgeye  $S$  nin *Hasse Çizelgesi* denir. Bir ksk nin Hasse Çizelgesi, onun tüm özelliklerini yansıtır.

Başlangıçta sunulan içecekler örneğinde, sıfırncı düzeyde elemanlar kümesi  $\{\ç\}$ , birinci düzeyde elemanlar kümesi  $\{k, \ell\}$  olup, daha yüksek düzeyde eleman yoktur. Böylece, içecekler örneğine karşılık gelen Hasse çizelgesi aşağıdaki gibidir:



Bir ksk nin bazı elemanları atılarak elde edilen bir altkümesi yine doğal olarak bir ksk dir. Bu düşünce ile, bir ksk  $S$  nin elemanlarının düzeyleri belirlenirken şu yol izlenebilir: Önce  $S$  nin büyükçe elemanları belirlenir; bunlar  $S$  nin sıfırncı düzeyde elemanlarıdır. Sonra,  $S$  den büyükçe elemanların atılmasıyla elde edilen kümenin büyükçe elemanları belirlenir; bunlar  $S$  nin birinci düzeyde elemanlarıdır.  $S$  den tüm 0-ıncı, 1-inci, ...,  $(k-1)$ -inci düzeyde elemanların atılmasıyla elde edilen alt kümenin büyükçe elemanları  $S$  nin  $k$ -ıncı düzeyde elemanlarıdır.

Somut bir örnekle yazamız bitiriyoruz. Bir beldede belediye başkanlığı için yapılan seçimde  $r$  aday bulunduğunu kabul edelim. Bu takdirde, her seçmen oyunu kullanırken (veya kullanmazken), bu  $r$  elemanlı seçenekler kümesi içinde bir kısba tanımlayacak ve böylece bu kümeyi bir ksk ye dönüştürecektir. Yaygın olarak uygulanan seçim yöntemlerinde, seçmenin, adaylardan sadece birini diğerlerine tercih etmesi istenir. Dolayısıyla, bir seçmenin belirleyeceği ksk nin Hasse Çizelgesi aşağıdakilerden biri olacaktır:

