OLİMPİYAT HABERLERİ

ALBERT ERKİP

33. Uluslararası Matematik Olimpiyatı bu yıl 13-21 Temmuz arasında Moskova'da yapılacak. Takımımız Selçuk Areşkan (Bornova Anadolu Lisesi), Oytun Eskiyenentürk (İzmir Fen Lisesi), Barış Fidan (Eskişehir Anadolu Lisesi), Sinan Güntürk (Kadıköy Anadolu Lisesi), Onur Menteş (Bornova Anadolu Lisesi) ve Cem Mutlugün'den (İstanbul Lisesi) oluşuyor. Nisan ayındaki son seçme sınavının ardından belirlenen takım gidene kadar toplam 5 haftalık iki çalışma daha yapacak. Takımımız elemanlarına Moskova'da iyi şanslar dilerken, seçme sınavı sorularına da yer verelim.

1992 Uluslararası Matematik Olimpiyadı Takım Seçme Sınavı

1. Oturum (3 Saat)

I-1. Her terimi $2, \leq \rho \leq 11$ koşulunu sağlayan p asal sayılarından en az biri ile bölünen 14 ardışık pozitif tamsayı bulunup bulunmadığını saptayınız.

I-2. ABC üçgeninin B köşesinden geçerek AC kenarına E noktasında dik olan doğru, bu üçgenin O merkezli çevrel çemberini D noktasında kesiyor. D den BC kenarına inilen dikmenin ayağı F noktası olduğuna göre BO doğrusunun EF doğrusuna dik olduğunu ispatlayınız.

I-3. $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ pozitif reel sayıları

$$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\ldots+\frac{1}{1+x_{n+1}}=1$$

koşulunu sağlıyorsa

$$x_1 x_2 \ldots x_{n+1} \geq n^{n+1}$$

olduğunu gösteriniz.

2. Oturum (3 Saat)

II-4. ABCD konveks kirişler dörtgeninin köşegenlerinin kesim noktası olan x noktasından, AB, BC, CD, DA kenarlarına indirilen dikmelerin ayakları sıra ile P, Q, R, S noktaları olduğuna göre,

$$PQ + RS = QR + SP$$

eşitliğini ispatlayınız.

II-5. 1 den n'ye kadar numaralanmış n kutudan 1 numaralı olanın kapağı açık; diğerlerinin kapakları kapalı bulunmaktadır. Birbirinin eşi m toptan $(m \geq n)$ bir tanesi bu açık kutuya koyulunca 2 numaralı kutunun kapağı açılıyor. Şimdi açık bulunan iki kutudan rastgele birine top koyulunca üçüncü kutu açılıyor. Bu şekilde devam edilerek son kutu da açıldıktan sonra geriye kalan top(lar) kutulara rastgele dağıtılıyor. Bu şartlar altında topların kutulara dağıtımı kaç farklı şekilde yapılabilir?

II-6. Yarıçapı 4 birim olan bir dairenin içinde 251 tane farklı nokta veriliyor. Bu noktalardan en az 11 tanesini içeren, yarıçapı bir birim olan bir daire çizilebileceğini gösteriniz.

Geçen Sayıdaki Sorulara Yanıtlar:

1- Toplantıda n kişi olsun ve bunların el sıkıştığı kişilerin sayısını sırasıyla $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ile gösterelim. Bir kişi en çok (n - 1) kişi ile el sıkışabildiğinden $0 \leq e ; \leq (n-1)$ olacaktır. Bir j değeri için $e_j = (n-1)$ olsun. Bu j-inci kişi herkesle el sıkıştı demektir ki, o halde geri kalanların hepsi en az bir kez el sıkmışlardır, yani her i için $1 \leq e_i$ olacaktır. Benzer yolla bir j için $e_j = 0$ ise tüm i'ler için $e_i \leq (n+2)$ olacaktır. Bu dediklerimizden $\{0, 1, 2, \ldots, n-2\}$ ya da $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ kümelerinden birinin tüm $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sayılarını içerdiği çıkar. n - çorap ($e_1, e_2, \ldots, e_n$ sayıları), (n - 1) çekmecededir; o halde en az iki e_i sayısı birbirine eşit olmalıdır.

2- Verilen 7 farklı reel sayı $x_1, x_2, \ldots, x_7$ olsun; ve $\tan t_i = x_i$ olacak şekilde $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığında $t_1, t_2, \ldots, t_7$ sayılarına bakalım. t_i'ler farklı olacaktır. Öte yandan π birim uzunluktaki bir aralıkta yer alan 7 sayıdan en az ikisi birbirlerine $\pi/6$ birimden daha yakın olmalıdır. Bu sayıları t_i ve t_j diye gösterelim, $t_j > t_i$ olsun. Bu halde

$$0 < t_j - t_i < \pi/6 \Rightarrow 0 < \tan(t_j - t_i) < \tan(\pi/6)$$

$$\tan(t_j - t_i) = \frac{\tan(t_j - \tan t_i)}{1 + \tan(t_j . \tan t_i)} = \frac{x_j - x_i}{1 + x_j x_i} \text{ ve}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

olduğundan istediğimiz özelliği olan x_j ve x_i sayılarını bulmuş olduk.

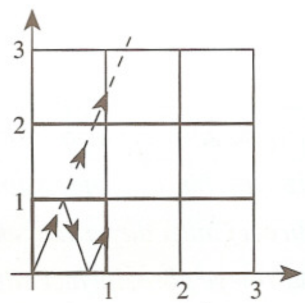
3- Önce bir gözlem yapalım: $[0, 4]$ aralığı içinde boyu bir birim olan bir kapalı aralık 1, 2 ve 3 noktalarından en az bir tanesini içermek zorundadır. Şimdi problemi çözelim. Elimizde 10 aralık var ve herbirini 1, 2 ve 3 sayılarından en az birini içeriyor. O halde 1, 2 veya 3 sayılarından biri en az 4 aralıkta olmalıdır.

4- Satranç ustası birinci günde a_1, ikinci günde $a_2, \ldots$, yetmişyedinci günde (11 haftanın son günü) a_{77} maç yapsın. $s_1 = a_1$, $s_2 = a_2, \ldots, s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ olsun. Verilenlerden, usta her gün en az bir maç yapmıştır, yani her a_i pozitiftir. Buradan da $1 \le a_1 < s_2 < \ldots s_{76} < s_{77}$ olduğu görülür. Öte yandan haftada en çok 12 maç yaptığından, 11 haftada en çok $11 \times 12 = 132$ maç yapmıştır. Yani $s_1, s_2, \ldots, s_{77}$ birbirinden farklı tam sayılar 1 ile 132 arasındadır. $2 \times 77 = 154 > 132 + 20$ olduğundan, örnek 2'deki yolla $s_j - s_i = 20$ olacak şekilde s_j ve s_i sayılarının olması gerektiği görülür. Bu ise $(i + 1)$ - inci günden j-inci güne kadar ustanın tam olarak 20 maç yaptığını söyler.

5- 52 farklı tam sayı $a_1, a_2, \ldots, a_{52}$ ve bunların 100 ile bölününce kalanları $r_1, r_2, \ldots, r_{52}$ $(0 \le r_i < 99)$ olsun. Eğer iki farklı kalan sıfırsa, yani $r_i = r_j = 0$ ise bu $a_i \pm a_j$ 100'le bölünür demektir. Aynı şekilde iki farklı kalan 50'ye eşitse yani $r_i = r_j = 50$ ise $a_i \pm a_j$ 100'le bölünür. O halde en çok bir r'nin sıfır, bir r kalanının ise 50 olduğunu kabul edelim; diğer 50 kalan $\{1, 2, \ldots, 49, 51, \ldots, 99\}$ kümesidir. Bir a sayısı 100'e bölündüğünde kalan r ise, -a sayısı için kalan 100-r olacaktır.

Şimdi $\{1, 2, \ldots, 49, 51, \ldots, 99\}$ kümesindeki 50 tane r kalanı ile 50 tane (100-r) şeklindeki sayıya bakalım. Çekmece ilkesinden $r_i = r_j$ (ya da $100-r_i = 100-r_j$) veya $r_i = 100-r_j$ olacak şekilde bir $i \neq j$ çifti olması gerektiği görülür. Bu ise ilk durumda $a_i - a_j$; ikinci durumda $a_i + a_j$ sayısının 100'e bölündüğünü söyler.

6- Bilardo masasını x-y düzleminde başlangıç köşesi (0,0) diğer köşeler (1, 0), (1,1) ve (0,1) noktalarına gelecek şekilde yerleştirelim. Masanın kenarları boyunca simetrilerini alırsak, topun yansıması şekilde görüldüğü gibi simetrilerde doğrusal olacak şekildedir.



Bu bakış açısı altında köşeler tam sayı koordinatlı (q, p) noktalarına karşı geleceğinden problem şuna dönüşür: (0,0)'dan geçen herhangi bir $y = mx$ doğrusunun tam sayı koordinatlı bir $(q,p) \neq (0,0)$ noktasına 1/20 birimden çok yaklaşacağını gösteriniz.

Bu son dediğimizi gösterelim. (q, p) noktasının $y = mx$ doğrusuna uzaklığı

$\frac{|qm - p|}{\sqrt{m^2+1}} \le |qm - p|$ dir. Öte yandan geçen ayıdaki örnek 4'te verilen bir x reel sayısı ve n tamsayısı için $|qx-p| < 1/n$ olacak şekilde p ve $1 \le q \le n$ tamsayılarının varlığını göstermiştik. $n = 20$ ve $x = m$ alırsak istenen (q, p) noktasının varlığını kanıtlamış oluruz.

7- Bu soru örnek 5'in bir benzeri. $e_i \varepsilon \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ olmak üzere $p = e_i |x_1| + e_2 |x_2| + \ldots + e_n |x_n|$ şeklindeki sayılara bakalım. Her e_i için k farklı değer koyabileceğimizden k^n tane p tipi sayı yazabiliriz. Öte yandan Cavchy Schwartz eşitsizliğinden

$$0 \leq p$$
$$\leq \left(e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2\right)^{1/2} \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)^{1/2}$$
$$\leq (k-1)\sqrt{n}$$

bulunur. Yani k^n tane p sayısı $[0, (k-1)\sqrt{n}]$ kapalı aralığı içindedir. O halde aralarındaki fark $\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$ 'den küçük olacak şekilde p, p' sayısı vardır. $p = e_1 |x_1| + e_2 |x_2| + \ldots + e_n |x_n|$ ve $p' = e'_1 |x_1| + e'_2 |x_2| + \ldots + e'_n |x_n|$ olsun. Yapılan seçimden $(e_1, e_2, \ldots, e_n) \neq (e_1', e_2', \ldots, e_n')$ olacaktır. $p - p' = (e_1 - e_1')|x_1| + (e_2 - e_2')|x_2| + \ldots + (e_n - e_n')|x_n|$ olduğundan; $x_i \geq 0$ ise $f_i = e_i - e_i'$ ve $x_i < 0$ ise $f_i = -(e_i - e_i')$ alırsak; f_i sayılarının hepsi sıfır değildir; her i için $|f_i| < k$'dır ve $|f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_n x_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$ 'dir.

ÇÖZMECENİN YANITI

$\sqrt{5739426081} = 75759$

YARIŞMA SONUCU

Yarışma sorularımıza, okuyucularımızın gösterdiği ilgi kıvanç verici bir düzeyde. Bildiğiniz gibi, bir yıl içinde yaptığı çözümlerin tümünü göz önüne alarak, okuyucularımızı ödüllendireceğimizi duyurmuştuk. Süresi içinde elimize geçen yanıtlar esas alınarak yapılan değerlendirmeye göre, birinci ciltte yayınlanan soruları çözen okurlarımız arasında en başarılı olan 6 tanesinin adlarını aşağıda açıklıyoruz. Bu okurlarımıza birer ***Başarı Belgesi*** *gönderilmiştir. Ödülleri de yakın zamanda postalanacaktır.*

		Doğru Çözüm	Yayınlar
C.Alparslan ERTUG	(İstanbul)	14	1
Aydın ÜNVERDİ	(İstanbul)	14	3
Atasayun BAYKAL	(Ankara)	13	2
Murat LİMONCU	(Ankara)	13	–
[illegible] GÜREL	(Ankara)	12	9
[illegible] MERSİN	(İstanbul)	11	1