DEĞERLENDİREN : ALPER HALBUTOĞULLARI

A26. {1,2, ..., n} doğal sayılar kümesinin 2 öğeli bütün altkümelerinden geçen sayıların toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM : (Burak Uzun, Ankara; S. Gökçen Şen, Erzurum; Doğan Mersin, İstanbul)

Her eleman diğer (n – 1) elemanın herhangi biriyle birleşerek iki elemanlı alt küme oluşturabilir. O halde her eleman (n – 1) alt kümede mevcuttur. Sayıların toplamına T dersek:

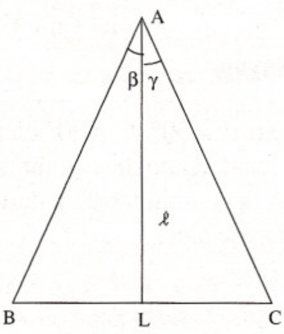
$$T = (n-1)\,.\,[1+2+\ldots+n] = \frac{(n-1)\,n(n+1)}{2} \text{ bulunur.}$$

A27. Bir ABC üçgeninde $L \in [BC]$, $\ell = |AL|$, $|AC| = b$, $|AB| = c$,

$\beta = \measuredangle BAL$, $\gamma = \measuredangle CAL$ ise

$$\frac{\sin A}{\ell} = \frac{\sin \beta}{b} + \frac{\sin \gamma}{c}$$

olduğunu ispatlayınız.



ÇÖZÜM :

$A(ABC) = A(ABL) + A(ALC)$

$$\frac{1}{2} b.c.\sin A = \frac{1}{2} c.\ell.\sin\beta + \frac{1}{2} b.\ell.\sin\gamma$$

Her iki tarafı da b.c.l çarpımıyla bölerek :

$$\frac{\sin A}{\ell} = \frac{\sin\beta}{b} + \frac{\sin\gamma}{c} \qquad \text{elde edilir}$$

Diğer Çözenler :

(Burak Uzun Ankara; Doğan Mersin, İstanbul; Ali İkiz, Konya; Erol Gedikli, Trabzon; Gökhan Andı, Ankara; Atilla Altın, Kırşehir)

A28. Karmaşık sayı düzleminde z, i, iz noktaları doğrudaş ise z nin geometrik yeri nedir.

ÇÖZÜM : (Atilla Altın, Kırşehir; Çetin Camcı, İzmir; Erol Gedikli, Trabzon)

$z = x + iy$ olsun. $\Rightarrow$ Noktalar :
$A(x, y)$, $B(0, 1)$, $C(-y,x)$ olur.

AB ve BC doğrularının çakışması için eğimleri eşit olmalıdır.

$$\Rightarrow m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{y-1}{x-0} = \frac{1-x}{0-(-y)}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-x-y=0 \Rightarrow (x-\tfrac{1}{2})^2+(y-\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{1}{2}$$

Geometrik yer $D(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ merkezli $\frac{\sqrt{2}}{2}$ yarıçaplı bir çemberdir.

A29. Bir ABC üçgeninde [BE] ve [CF] iç iki açıortay ise, BCEF nin bir

a) kirişler dörtgeni

b) teğetler dörtgeni

olup olmayacağını araştırınız ve olması halinde üçgeni belirleyiniz. (Hazırlayan: H. Demir)

ÇÖZÜM : Üçgenin kenar uzunlukları a, b, c ve iç teğet çemberin merkezi I olsun. Aşağıdaki uzunluklar bilinmektedir :

$$b_1 = |AE| = \frac{bc}{a+c}, \quad c_1 = |AF| = \frac{bc}{a+b}, \qquad (1)$$
$$b_2 = |EC| = \frac{ab}{a+c}, \quad c_2 = |FB| = \frac{ac}{a+b},$$

a) BCEF kirişler dörtgeni ise A nın bu dörtgenin çevresel çemberine göre kuvvetinden

$$b_1 b = c_1 c \Rightarrow b(a+b) = c(a+c)$$
$$\Rightarrow (b-c)(a+b+c) = 0$$
$$\Rightarrow b = c$$

olmalıdır.

b) BCEF kirişler dörtgeni ise BE doğrusu dörtgende B ve E açılarının açıortayı olur. Açıortayın oran özeliğinden, $|EF| = x$ olmadığında

$$\frac{x}{b_2} = \frac{|FI|}{|IC|} = \frac{c_2}{a}$$

yazılır. Bu da (1) den

$$x = \frac{abc}{(a+b)(a+c)}$$

değerini verir.
Bu teğetler dörtgeninde $x + a = b_2 + c_2$ olacağından (1) den ve x in değerinden

$$bc + (a+b)(a+c) = b(a+b) + c(a+c)$$
$$\Rightarrow 2bc = b^2 + c^2 + a^2 \Rightarrow 1 = \cos A \Rightarrow 1 = 0$$

elde edilir ki (b) denklemi sağlayan hiç bir üçgen yoktur.

A30. Her n doğal sayısı için

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

olduğunu gösteriniz. (Burada $\binom{n}{k}$ simgesi n öğeli bir kümenin k öğeli altkümeleri sayısını göstermektedir)

ÇÖZÜM : Eşitliğin sağ tarafı 2n elemanlı kümenin n elemanın kaç farklı yoldan seçilebileceğini göstermektedir. Şimdi baştaki kümeyi iki eşit kümeye ayırıp bunlara A ve B ismini verelim, ve n eleman seçme işlemini tanımlayalım; n elemanı şu şekilde seçebiliriz :

A dan hiç almayıp, B den n tane alırız, veya

A dan 1 tane alıp, B den n – 1 tane alırız,veya

A dan 2 tane alıp, B den n – 1 tane alırız, veya
⋮
A dan k tane alıp B den n–k tane alırız, veya
⋮
A dan n tane alıp, B den hiç almayız.

Bu işlemin genel basamağını (yani k. basamağını) gerçekleştirmenin $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k}$ farklı yolu vardır. O halde tüm seçilim

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \ldots + \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$
$$+ \ldots + \binom{n}{n}\binom{n}{n}$$

farklı yoldan yapılır. Ve bu $\binom{2n}{n}$ ifadesine eşittir. Şimdi $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ eşitliğini kullanarak ifademizi yeniden yazarsak:

$$\binom{n}{0}\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{k}\binom{n}{k}$$
$$+ \ldots + \binom{n}{n}\binom{n}{n} = \binom{2n}{n}$$

veya

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{k}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

bulunur.

Y26. $-x^4 - y^4 - z^4 - t^4 + 2(x^2y^2 + x^2z^2 + x^2t^2 + y^2z^2 + y^2t^2 + z^2t^2) + 8xyzt$ polinomunu, birinci dereceden tam katsayılı polinomların çarpımı olarak yazınız.

ÇÖZÜM I : Bu çözümde Burak Uzun'un (Ankara) çözümündeki fikirlerden yararlanılmıştır.

Birinci dereceden tam katsayılı genel polinom $(a_ix + b_iy + c_iz + d_it + e_i)$ şeklindedir. Verilen polinom bu tip n tane polinomun çarpımına eşittir.

i) Tüm terimlerin kuvvetleri eşit olduğundan sabit terimler sıfırdır. $e_i = 0$ $(i = 1,2,...,n)$ (Bir terimin kuvveti terimlerinin üsleri toplamıdır.)

ii) x^4 terimi ancak (a_ix) terimlerinin çarpılmasıyla elde edilir. O halde $a_i \neq 0$ ve benzer şekilde $b_i \neq 0$, $c_i \neq 0$, $d_i \neq 0$ $(i = 1,2,..., n)$ Ayrıca asıl polinom, birinci dereceden 4 polinomun çarpımıdır. $(n = 4)$

iii) x^4 ün katsayısı : $-1 = a_1 . a_2 . a_3 . a_4$ $\Rightarrow a_i = \mp 1$, benzer şekilde $b_i = c_i = d_i = \mp 1$ $(i = 1,2,3,4)$

iv) Katsayılar toplamı $x = y = z = t = 1$ alınarak 16 bulunur. 1. dereceden polinomunki sadece 0, ∓ 2, ∓ 4 olabileceği için, 16 çarpımı sadece ∓ 2 çarpanları ile elde edilebilir. Negatif olan parantezler çift sayıda olduğundan bunları da (–1) lerle çarparsak tüm parantezlerdeki katsayıların toplamı 2 olmak zorunda olur. Yani üçü +1, biri –1.

(iii)'ten dolayı bir değişkenin en az bir katsayısı –1 olduğundan :

$P(x) = (x + y + z - t)(x + y - z + t)(x - y + z + t)(-x + y + z + t)$ bulunur.

ÇÖZÜM II : (Bilal Yurdakul , İzmir)

$-x^4 - y^4 - z^4 - t^4 + 2(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + x^2t^2 + y^2t^2 + z^2t^2) + 8xyzt$,

$$= -(x^4 - 2x^2y^2 + y^4) - (z^4 - 2z^2t^2 + t^4) + 2x^2z^2 + 2x^2t^2 + 2y^2t^2 + 2y^2z^2 + 8xyzt$$

$$= -[(x^2-y^2)^2 + (z^2 - t^2) - 2x^2(z^2 + t^2) - 2y^2(t^2 + z^2) - 8xyzt]$$

$$= -[(x^2 - y^2 + z^2 - t^2)^2 - 2(x^2 - y^2)(z^2 - t^2) - 2x^2(z^2 + t^2) - 2y^2(t^2 + z^2) - 8xyzt]$$

$$= -[(x^2 - y^2 + z^2 - t^2)^2 - 4(x^2z^2 + t^2y^2 + 2xyzt)]$$

$$= -[(x^2 - y^2 + z^2 - t^2)^2 - (2xz + 2ty)^2]$$

$$= -(x^2 + z^2 - 2xz + z^2 - t^2 - 2ty)(x^2+z^2+2xz - y^2 - t^2 - 2yt)$$

$$= -[(x - z)^2 - (y + t)^2][(x + z)^2 - (y - t)^2]$$

$$= (x-y+z-t)(x+y-z+t)(x-y+z+t)(-x+y+z+t)$$

Diğer Çözenler :

Murat Beyboğa, İzmir. Çetin Camcı, İzmir; Ö. Serdar Şahin, İzmir; Okay Çalışkan, İzmir; Atasagun Baykal, Ankara; Murat Limoncu, Ankara; İlyas Küreli, İstanbul

Not: S.Gökçen Şen, Erzurum; Erol Gedikli. Sadece sonuç gönderen yarışmacıların kağıtları değerlendirilmeye alınmamıştır.

Y27. Bir ABCDEF dışbükey kirişler altıgeninde

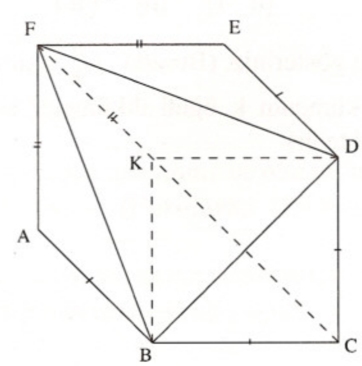
$|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$, $|EF| = |FA|$

ise alanlar için

$|BDF| = \frac{1}{2}$ $|ABCDEF|$

eşitliğini ispatlayınız.

ÇÖZÜM : (Bilal Yurdakul, İzmir, Murat Limoncu-Ankara)



$x_{t_1} = x_{t_2}$, $y_{t_1} = y_{t_2}$ olduğuna ve kesişen iki doğrunun ancak bir ortak noktası olduğuna göre,

$T_1 \equiv T_2 \equiv T$

Demek ki T noktası $\overline{S}Q$ ve $\overline{R}P$ doğru parçalarını λ ve μ oranında bölüyor.

Y29. p asal sayı , $p > 2$ ve

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{p-1} \quad ; \quad m, n \in Z^+$$

ise m nin p ile bölünebileceğini gösteriniz.

ÇÖZÜM : (Burak Uzun, Ankara)

$p > 2$ için p tek sayıdır.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-2} + \frac{1}{p-1}$$

toplamı $p-1$ çift sayı olduğu için çift sayıda terim içerir. Toplamı, baştan ve sondan karşılıklı terimleri gruplandırarak yazarsak

$$\frac{m}{n} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{p-1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p-2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{p-k}\right)$$

"k ve $p-k$ toplamının en ortasındaki iki terim".

$$\frac{m}{n} = p\left(\frac{1}{1\,(p-1)} + \frac{1}{2(p-2)} + \dots + \frac{1}{k\,(p-k)}\right)$$

p : m nin çarpanlarından biridir.

n : $(p-1)!$ ya da $(p-1)!$ in çarpanlarından oluşur ve p terimi içermez.

$$\frac{m}{n} = \frac{p\,.\,t}{(p-1)!}$$

t , Parantez toplamı ; p, m nin bir çarpanı.

Diğer Çözenler :

Bilal Yurdakul, İzmir; Ö.Serdar Şahin, İzmir; Atilla Altın, Kırşehir; Atasagun Baykal, Ankara)

Y30. A, B, C bir üçgenin açıları olduğuna göre

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos^2 C & \cos^2 B \\ \cos^2 C & 1 & \cos^2 A \\ \cos^2 B & \cos^2 A & 1 \end{vmatrix}$$

determinantını üçgenin S alanı ve R çevrel yarıçapı türünden hesaplayınız.
(Hazırlayan : C Koç, H. Demir)

ÇÖZÜM : (Bilal Yurdakul, İzmir)

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos^2 C & \cos^2 B \\ \cos^2 C & 1 & \cos^2 A \\ \cos^2 B & \cos^2 A & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 + 2\cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C - \cos^4 A - \cos^4 B - \cos^4 C$$
$$= 1 + 2(1-\sin^2 A)\,(1-\sin^2 B)\,(1-\sin^2 C)$$
$$-(1-\sin^2 A)^2 - (1-\sin^2 B)^2 - (1-\sin^2 C)^2$$

Ayrıca,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad ; \quad \frac{abc}{4R} = S$$

olduğunu biliyoruz.

$$= -\frac{(a^2+b^2-c^2)^2 - 4a^2b^2}{16R^2} + \frac{8S^2}{16R^4}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}{16R^4} - \frac{8S^2}{16R^4}$$

Bilindiği gibi

$$\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)} = S$$
$$u(u-a)(u-b)(u-c) = S^2$$
$$(b+c-a)(a+b+c)(a+b-c)(a+b+c) = 16S^2$$

dir. Dolayısıyla

$$\frac{16S^2 - 8S^2}{16R^4} = \frac{S^2}{2R^4}$$

Diğer Çözenler :
Atasagun Baykal, Ankara; Erol Gedikli, Trabzon; Osman Nuri Okumuş, İzmir; Murat Limoncu, Ankara; Çetin Camcı, İzmir; Burak Uzun, Ankara)

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

* *Konu sunuşları,*
* *Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar,*
* *Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı,*
* *Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler,*
* *Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar,*
* *Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler,*
* *Matematik dünyasından güncel haberler.*

Gönderilen yazılar olduğu gibi yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayıcı bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı veya tercihan daktilo ile yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar:

Matematik Dünyası
ODTÜ Matematik Bölümü
06531 Ankara

adresine gönderilecektir.

Fiatı: 10.000.-TL.