

FIBONACCI SAYILARI HAKKINDA BİR KURAL

FARAMAZ MAKSUDOV, CAFER VELİEV

1 202 yılında İtalyan matematikçisi Pisa'lı Leonardi (lakabı Bonacci), "Abak hakkında kitap" isimli eserini yazdı. Bu eserde tavşanların çoğalmasına dair bir problem var. Bu problemi aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz: "Bir çift erişkin tavşan her ay bir defa bir çift yavru verir, yeni doğmuş tavşanlar ise 1 ayda erginleşip 2. aydan itibaren yavru verirler. Eğer bir çift yeni erginleşmiş (1 aylık) tavşandan başlarsak, n ay sonra kaç çift erişkin tavşan olacaktır?"

Her ayda kaç çift erişkin tavşan olduğunu hesaplırsak aşağıdaki diziyi buluruz :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Burada üçüncüden itibaren her sayı kendinden önce iki sayının toplamına eşittir. Bu diziyi *Fibonacci dizisi*, dizinin terimlerine ise *Fibonacci sayıları* adı verilir :

$$a_1 = a_2 = 1 \quad (1)$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (2)$$

Eğer bir dizide ilk birkaç terim verilir ve diğer terimler de kendilerinden önceki terimlerin belli bir fonksiyonu olarak ifade edilirse, bu diziyeye bir *indirgemeli dizi* denir. Fibonacci dizisi de bir indirgemeli dizidir, ve onun belirlenmesi için hem (1), hem de (2) koşulları önemlidir. Örneğin (1) koşulu yerine $u_1 = 2, u_2 = 1$ alırsak, $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots$ dizisi elde edilir.

Fibonacci sayılarının birçok ilginç özellikleri vardır, Örneğin :

1. $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_{n+2} - 1,$
2. $a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1} = a_{2n},$
3. $a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = a_{2n+2} - 1,$
4. $a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n+1}a_n = (-1)^{n+1}a_{n-1} + 1,$
5. $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = a_n a_{n+1},$

$$6. a_{n+m} = a_{n-1}a_m + a_n a_{m+1},$$

$$7. a_{2n} = a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2.$$

Birinci eşitliği ispat etmek için

$$a_k = a_{k+2} - a_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

ikincisini ispatlamak için

$$a_1 = a_2, a_k = a_{k+1} - a_{k-1}, \quad k = 3, 5, \dots,$$

üçüncü ve dördüncüyü ispat etmek için (1) ve (2) beşinci ispat etmek için

$$a_k^2 = a_k \cdot a_k = a_k (a_{k+1} - a_{k-1}) = a_k a_{k+1} - a_k a_{k-1}$$

eşitliklerini uygulamak gerekir. Altıncı eşitlik m ye göre tümevarımla ispatlanır. Altıncı eşitlikte $m = n$ alınıp, $a_n = a_{n+1} - a_{n-1}$ olduğu göz önünde tutulursa yedinci eşitlik bulunur.

Fibonacci sayılarının başka ilginç özellikleri de var. Bizim amacımız ise başka : Fibonacci sayılarını tekbaşlarına nasıl hesaplayabiliriz? Burada doğrusal cebir bize yardımcı olacak.

Daha genel problemi ele alalım. İndirgemeli bir (a_n) dizisi aşağıdaki gibi belirlenmiş olsun: a_1, a_2 verilen sayılardır ve

$$a_{n+1} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

burada $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$; α, β verilen sayılardır.

Önce (3) denklemini sağlayan tüm olabilecek dizilerin oluşturduğu A kümesini ele alalım.

Eğer (u_n) dizisi (3) denklemini sağlıyorsa (cu_n) dizisi de (3) denklemini sağlar, burada c herhangi bir sayıdır. Bunu görmek için (3) denkleminin her iki yanını da c ile çarpmak yeterlidir.

Eğer (u_n) ve (v_n) dizileri (3) denklemini sağlarsa $(u_n + v_n)$ dizisi de aynı denklemi sağlar. Bunu hemen görmek için (3)

denkleminde önce $a_n = u_n$, sonra $a_n = v_n$ yazıp, eşitlikleri taraf tarafa toplamak gerekir.

Böylece gördük ki, eğer $(u_n) \in A$, $(v_n) \in A$ ise, $(c_1 u_n + c_2 v_n) \in A$ dir.

$(u_n) \in A$, $(v_n) \in A$ olsun. Eğer

$$c_1 u_1 + c_2 v_1 = 0 \quad (4)$$

$$c_1 u_2 + c_2 v_2 = 0 \quad (5)$$

eşitlikleri sağlanacak şekilde, en az biri sıfırdan farklı c_1, c_2 sayıları varsa (u_n) ve (v_n) dizileri *lineer bağımlıdır*. Tersine, (4) ve (5) i sağlayan en az biri sıfırdan farklı c_1, c_2 sayıları yoksa, bu durumda (u_n) ve (v_n) dizileri *lineer bağımsızdır* denir.

Lemma 1: $(u_n) \in A$, $(v_n) \in A$ ve $w = u_1 v_2 - u_2 v_1$ olsun. (u_n) ve (v_n) dizilerinin lineer bağımsız olmaları için gerek ve yeter koşul $w \neq 0$ olmasıdır.

İspat : Gereklilik. Aksini kabul edelim: (u_n) ve (v_n) lineer bağımsız ancak $w = 0$ olsun. $u_1 = u_2 = 0$ olamaz, örneğin $u_2 \neq 0$ alırsak (4-5) eşitlikleri sağlar.

$$c_1 u_1 + c_2 v_1 = u_1 v_1 - u_2 v_1 = w = 0$$

$$c_1 u_2 + c_2 v_2 = u_2 v_2 - u_2 v_2 = 0$$

Bu ise (u_n) ve (v_n) dizilerinin lineer bağımlı olduğunu gösterir. Böylelikle çelişki elde ederiz, ona göre $w \neq 0$ dir.

Yeterlilik: Aksini kabul edelim: $w \neq 0$ olduğunu ancak (u_n) ve (v_n) dizilerinin lineer bağımlı olduğunu kabul edelim. O halde en az biri sıfırdan farklı olan öyle c_1, c_2 sayıları vardır ki (4-5) eşitlikleri sağlanır $c_2 \neq 0$ olsun. Bu takdirde (4-5) ten

$$v_1 = -c_1 u_1 / c_2, \quad v_2 = -c_1 u_2 / c_2$$

ve

$$\begin{aligned} w &= u_1 v_2 - u_2 v_1 \\ &= u_1 (-c_1 u_2 / c_2) - u_2 (-c_1 u_1 / c_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

buluruz. Yine çelişkiye ulaştık. Lemma ispat olundu.

Lemma 2. $(u_n) \in A$, $(v_n) \in A$; (u_n) ve (v_n)

lineer bağımsız olsunlar. (z_n) , A da olan herhangi bir dizi olsun. Bu durumda öyle tek bir c_1, c_2 çifti vardır ki

$$z_n = c_1 u_n + c_2 v_n \quad n = 1, 2, \dots$$

ayrılışı doğrudur.

İspat:

$$c_1 u_1 + c_2 v_1 = z_1 \quad (6)$$

$$c_1 u_2 + c_2 v_2 = z_2 \quad (7)$$

denklemler sistemine bakalım. Lemma 1'den $w = u_1 v_2 - u_2 v_1 \neq 0$ olduğunda (6-7) denklemlerini çözerek

$$c_1 = (z_1 v_2 - z_2 v_1) / w, \quad c_2 = (u_1 z_2 - u_2 z_1) / w$$

buluruz. (6) eşitliğini β ile, (7) yi de α ile çarparak taraf tarafa toplarsak

$$z_3 = c_1 u_3 + c_2 v_3$$

elde ederiz.

Tümevarım yöntemi ile benzer şekilde

$$z_n = c_1 u_n + c_2 v_n$$

olduğu gösterilir.

Şimdi (3) denkleminin iki lineer bağımsız çözümünü bulmak için (3) denkleminde $a_n \lambda^n$ değerini yerine koyalım.

$$\lambda^{n+2} = \alpha \lambda^{n+1} + \beta \lambda^n,$$

her iki tarafı

$$\lambda^2 - \alpha \lambda - \beta = 0 \quad (8)$$

elde ederiz. (8) denkleminin (3) denkleminin *karakteristik denklemi* diye adlandırılır.

Aşağıdaki halleri ayrı ayrı gözden geçirelim :

$1 - D = \alpha^2 + 4\beta > 0$. Bu halde (8) denkleminin iki farklı kökü var :

$$\lambda_1 = (\alpha + D^{1/2}) / 2, \quad \lambda_2 = (\alpha - D^{1/2}) / 2$$

Bu halde biz (3) denkleminin lineer bağımsız $(u_n) = (\lambda_1^n)$ ve $(v_n) = (\lambda_2^n)$ çözümlerini elde ettik.

(3) denkleminin istenen (z_n) çözümü için

$$z_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$$

kuralını bulduk.

$$2 - D = \alpha^2 = 4\beta = 0 \text{ ya da } \beta = -\alpha^2 / 4.$$

Bu halde (8) denklemin kökleri çakışık.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha / 2$$

Bu halde $(u_n) = (\lambda_1^n)$ ve $(v_n) = (n\lambda_1^n)$, (3) denkleminin lineer bağımsız iki çözümüdür. (u_n) dizisinin (3) denklemini sağladığını biliyoruz. $a_n = v_n$ yazıp (3) denkleminin doğru olup olmadığını yoklayalım.

$$u_n = n \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n, \quad v_{n+1} = (n+1) \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+1},$$

$$v_{n+2} = (n+2) \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+2}$$

$$v_{n+2} - \alpha v_{n+1} + \frac{\alpha^2}{4} v_n = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^n [n+2 - 2(n+1) + n] = 0$$

Yani, (v_n) , (3) denkleminin çözümüdür. (u_n) ve (v_n) lineer bağımsızdır, çünkü:

$$v = u_1 v_2 - u_2 v_1 = \lambda_1 \cdot 2\lambda_1^2 - \lambda_1^2 \cdot \lambda_1 = \lambda_1^3 \neq 0$$

3- $D = \alpha^2 + 4\beta < 0$ ya da $\beta < -\alpha^2/4$ olduğunda (8) denkleminin reel kökü yoktur. Bu halde aktarılan kuralı elde etmek için karmaşık sayılardan yararlanmak gerekir.

Şimdi n -inci Fibonacci sayısını belirlemek için hesaplama yapalım. (2) denkleminde $a_n = \lambda^n$ yazıp

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

kararistik denklemini buluruz. Denklemin kökleri

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Böylelikle, biz (2) denkleminin $(u_n) = (\lambda_1^n)$ ve $(v_n) = (\lambda_2^n)$ lineer bağımsız iki çözümünü bulduk. (a_n) Fibonacci dizisinde $a_1 = a_2 = 1$ olduğunu göz önünde bulundurarak (6-7) denklem sistemini çözüp c_1 ve c_2 sayılarını buluruz:

$$c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 = 1$$

$$c_1 \lambda_1^2 + c_2 \lambda_2^2 = 1$$

$$c_1 = 1/\sqrt{5}, \quad c_2 = -1/\sqrt{5}. \text{ Böylelikle}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

veya kısaca yazarsak

$$a_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\sqrt{5}}, \quad \lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

kuralını bulduk. Bu kural ona ilk bulan matematikçinin adı ile Bine (?) kuralı diye adlandırılır. İlginç alan şudur ki, λ_1 sayısı "altın oran"ı ifade eder. (3) denklemini çözmek için yararlandığımız yöntem sabit katsayılı adı lineer diferansiyel denklemlerin çözümünde de kullanılır.

Binet formülünü uygulayarak Fibonacci sayılarının aşağıdaki özellikleri ispat edilebilir.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda_1,$
- $a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{3n} = (a_{3n+2} - 1) / 2,$
- $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = (a_{3n+2} + (-1)^{n+1} \cdot 6a_{n-1} - 1) / 10.$
(öncelikle $a_k^3 = (a_{3k} + (-1)^{k+1} \cdot 3a_k) / 5$ olduğu gösterilmelidir.
- a_n sayısı $\lambda_1^n / \sqrt{5}$ sayısına en yakın tamsayıdır.
- $S_n(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ olsun.

O halde :

$$S_n(x) = \begin{cases} \frac{x - a_n x^{n+2} - a_n + 1 x^{n+1}}{1 - x - x^2} & \lambda_1 x \neq 1, \lambda_2 x \neq 1, \text{ ise.} \\ \frac{n}{\sqrt{5}} - \frac{5\sqrt{5}-5}{2} (1+(-1)^{n+1} \lambda_2^{2n}) & \lambda_1 x = 1 \text{ ise.} \\ -\frac{n}{\sqrt{5}} - \frac{1+\sqrt{5}}{10} (1+(-1)^{n+1} \lambda_2^{2n}) & \lambda_2 x = 1 \text{ ise.} \end{cases}$$