PARADOKSLAR, ÇATIŞKILAR

TALAT TUNCER

Burada bazı ilginç paradokslardan söz edeceğim. Önce kavramlara açıklık getirelim. *Paradoks*, felsefe bakımından soyut muhakemenin, bazı hallerde sona erdiği çelişki. *Çatışkı* (antinomie) ise, iki felsefe yasası, iki felsefe ilkesi arasındaki çelişki. *Çelişki* (contradiction), daha önce söylenen ya da yapılana aykırı düşme eylemi.

Matematikte çok paradoks ve çatışkı mevcuttur. Burada ancak bir ikisini söyleyeceğiz. Cantor, matematikteki paradoksları gidermek için "Kümeler Kuramı"nı ortaya attı; bu kuram bir çok şeye çözüm getirmekle birlikte kendisi de paradokslar doğurdu. Bazılarını ünlü ingiliz matematikçi ve felsefecisi Bertrand Russel giderdi. Ama eksikler konumunu koruyor.

Zenon ya da **Aşil (Akhilleus)** veya **Kaplumbağa paradoksu:**

Aşil önünde ilerleyen bir kaplumbağayı hiç bir zaman yakalayamayacaktır. Çünkü Aşil önce kaplumbağanın bulunduğu yere gelmelidir. Oraya gelince kaplumbağa burayı bırakmış ve ilerisinde bulunmuş olacaktır. Bu muhakeme yinelenerek anlaşılır ki kaplumbağa daima Aşil'in önünde kalacaktır.

Russel Paradoksu:

Z kendilerini eleman olarak almayan bütün kümelerin kümesi olsun, yani;

$$Z = \{ X \mid X \notin X \}$$

dir. Z kendine ait midir, değil midir? Z, Z ye ait olmasa, Z nin tanımına göre Z kendisine ait olur. Bundan başka Z, Z ye ait olsa, Z nin tanımına göre Z kendine ait değildir. Her iki hal de bir çelişkiyle sonuçlanır.

Bunun halk arasında benzeri *berber paradoksu*dur: Bir köydeki berber, ancak kendi kendine traş olamayan bütün erkekleri traş ediyor ve başkalarını etmiyor. Berber kendini traş eder mi? (Ya da berberi kim traş eder?)

Gerçekten berber kendini traş etse, kendi kendine traş olamayan erkekleri traş etmesine aykırı düşmüş bulunur. Kendini traş etmese, "ancak başkalarını traş etmemesine" aykırı düşmüş bulunur.

Paradoksal Problem:

M. V. Berry'ye göre (*Principles of Cosmology*, Cambridge University Press, 1976, sayfa 122) gözlemlenebilen evrenin çapı kabaca 10^{26}m olarak bilinmektedir, dolayısıyla hacmi 5.10^{77} m^3 eder, ($\pi \cong 3$ alındı). Bir tavşan yaşamı boyunca ortalama 5 yavru yapsa, kaç kuşak sonra tavşanlar evrenden fazla yer tutarlar? Mevcut 100 tavşan olduğu kabul edilecek ve bir tavşanın hacmi ortalama 1 dm^3 alınacak.

Çözümü: n nci kuşakta tavşanlar evren kadar yer tutsun. Tavşan sayısı geometrik diziye göre artsın. n nci terim $a_n = a_o q^{n-1}$ dir, a_o ilk terim, q ortak çarpan. Buna göre $a_o = 100$, $q = 5$ olduğundan

$$100.5^{n-1}.\ 10^{-3} = 5.10^{77} \Rightarrow 5^{n-2} = 10^{78},$$

logaritma alırsak (10 tabanına göre),

$$(n-2)\log 5 = 78 \Rightarrow n = 2 + \frac{78}{0{,}69897} \cong 114$$

çıkar. Demek ki 114 kuşak sonra tavşanlara yer kalmayacak.

Bütün kümelerin kümesi. Cantor paradoksu:

Bütün kümelerin kümesini $\mathcal{C}$ ile gösterelim. Bu durumda $\mathcal{C}$ nin her alt kümesi $\mathcal{C}$nin bir elemanı (ya da üyesi) dır. Buna göre $\mathcal{C}$nin kuvvet kümesi (yani alt kümeler kümesi) de $\mathcal{C}$nin bir alt kümesidir. $\mathcal{C}$ nin kuvvet kümesi $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ ya da 2 $\mathcal{C}$ ile gösterilir. Demek ki

$$2^{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}$$

dir. Bundan

(1) $\quad \text{card}\,(2^{\mathcal{C}}) \leq \text{card}\,(\mathcal{C})$

yazılır, çünkü alt kümenin kardinali asıl kümeninkinden küçüktür. (1)e göre kuvvet kümesinin kardinali, bütün kümeler kümesinin kardinalinden geniş anlamda küçüktür. (card, kardinalin yani sayma sayısının sembolüdür). Oysa Cantor teoremine göre

(2) $\quad \text{card}\,(\mathcal{C}) < \text{card}\,(2^{\mathcal{C}})$

dir. (1) ile (2) birbiriyle çelişki oluşturur.

Not: Cantor teoremi: Herhangi bir E kümesi için

$$E < 2^E$$

dir (yani E kümesi, kendinin kümeler kümesini önceler) ve dolayısıyla

$$\text{card}\,(E) < \text{card}\,(2^E) \quad \textit{dir.}$$