BASİT SONLU GRUPLARIN SINIFLANDIRILMASI

MAHMUT KUZUCUOĞLU

Bu yazımızda sonlu gruplar teorisinde ispatlanan çok önemli bir teoremi hiç bir tekniğe girmeden tanıtmaya çalışacağız. Bu teoremi tanıtmak için sizlere bazı tanımlar vereceğiz. Her lise öğrencisinin bildiği grup tanımını kısaca tekrar edelim: Boş olmayan bir G kümesi ve bu küme üzerinde bir ikili işlem "." verilmiş olsun. Yani, $G \times G \to G$ bir fonksiyon verilsin ve her $a, b \in G$ için $.(a, b) = a.b$ olarak gösterilsin. Bu fonksiyon G kümesi üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa G ye grup denir.

1) Her $x,y,z \in G$ için $x.(y.z)=(x.y).z$ dir.

2) Her $x \in G$ için $e.x = x.e = x$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır.

3) Her $x \in G$ için $x.y = y.x = e$ olacak şekilde bir $y \in G$ vardır. $y = x^{-1}$ ile gösterilir.

Eğer bir G grubunda her $x,y \in G$ için $x.y = y.x$ özelliği sağlanıyorsa bu gruba değişmeli grup denir.

$Z_p = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{p-1}\}$ kümesi toplamaya göre bir değişmeli gruptur, burada $\overline{1}$; doğal sayılarda modulo p'ye göre 1'in denklik sınıfıdır.

Bu yazımızda grup denilince G kümesinde sonlu tane eleman olduğunu kabul edeceğiz.

G grubunun boş olmayan H alt kümesi, her $x, y \in H$ için $x.y^{-1} \in H$ özelliği sağlarsa, H bir altgruptur denir. N altgrubu her $g \in G$ ve her $n \in N$ için, $g^{-1}ng \in N$ özelliğini sağlarsa N'ye normal alt grup denir. Bir grubun normal altgrupları grupların yapılarını anlamamıza yardımcı oldukları için normal alt grupların özel bir önemi vardır. N grubu, G nin normal altgrubu ise $G/N = \{xN | x \in G\}$ kümesi tekrar bir grup yapısına haizdir. G/N grubu "genellikle" G'nin sahip olduğu "grup teorik" özelliklerin bir kısmını korur.

Bir tanım daha verip, sonra matematikçilerin uzun yıllar üzerinde çalıştıkları ve sonunda mutlu sona ulaşılan bir problemi tanıtalım. Bir G grubunun birim elemandan oluşan ve kendisinden başka normal altgrubu yoksa G grubuna basit grup denir. Bu tanım Evariste Galois (1811-1832) tarfından verilmiştir. Basit gruplara örnek vermek gerekirse, mertebesi (gruptaki eleman sayısı) P olan (P asal) her grup basit bir gruptur ve biraz daha dikkatle bakılınca herkesin göreceği gibi değişmeli ve basit olan gruplar yukardaki örnekteki gruplarla eşyapılıdır (izomorftur).

Basit grupların, gruplar teorisindeki önemi, asal sayıların sayılar teorisindeki önemine benzer. Bunu anlamak için G grubunun maksimal normal altgrubu G_1 i alalım, G/G_1 grubu basit bir gruptur, şimdi G_1 in maksimal normal altgrubu G_2 yi alalım. G_1/G_2 yine basit bir grup olur. Bu işleme birim elemandan ibaret olan altgruba ulaşıncaya kadar devam edelim.

$$G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq ... > G_n = 1$$

bulunur ve her i için G_i/G_{i+1} basit bir gruptur. Bir grubun yukarıdaki gibi serisi hakkında Jordan-Hölder teoremi ([5] sayfa 43) şunu söyler: Eğer G grubunun

$$G \geq M_1 \geq M_2 \ldots \geq M_k = 1$$

gibi bir başka serisi olsa ve her j için M_j/M_{j+1} basit olsa o zaman k=n'dir ve her i için öyle bir j vardır ki G_i/G_{i+1} ve M_j/M_{j+1} grupları birbirine izomorftur. Bu açıklama ile sanırım basit grupları asal sayılara benzetme işi biraz daha anlaşılır oldu.

Biz yazımızın bundan sonraki kısmında basit grup denilince değişmeli olmayan basit grupları anlayacağız. Bu kısımdaki basit gruplar yapıları bakımından hiç de isimleri gibi basit değil, tam tersine oldukça karmaşık yapılara sahiptirler.

Galois, 5 sembol üzerindeki alterne permütasyon grubunun basit olduğunu ispatlamıştır. Sonra Camillo Jordan (1838-1922) 1870 yılında yayınladığı bir kitapta 5 ayrı sınıftan oluşan ve herbirinde sonsuz tane basit grup olan, 5 basit grup sınıfını yayınlamıştır.

Bunlardan birincisi alterne permutasyon grupları Alt (n), $n \geq 5$ dir. Jordan diğer dört sınıfı, matrisleri kullanarak sınıflandırmıştır. Bunlardan bir tanesi mxm'lik ($m \geq 2$), determinantı 1 olan matrisler grubu (SL (m,p^n) (bu matrislerin elemanları p^n elemanlı bir cisimden alınmaktadır) bu gruptan elde edilen bölüm grubu PSL (m, p^n) = SL(m, p^n)/Z SL (m, p^n) gruplarıdır. (yukarıda Z(SL (m, p^n)) grubu, SL (m, p^n) grubunun merkezidir). Jordan bu grupların (m, p) nin (2, 2) ve (2, 3) den farklı olduğu durumlarda basit olduklarını göstermiştir.

Diğer sınıflarda determinantı 1 olan ve dejenere olmayan belli bir quadratik formu koruyan matrislerin bölüm grubu olarak tanımlanabilir.

Burada sadece problemi ve sonucu tanıtmaya çalıştığımız için birazda magazin kısmına değinelim.

Bu problemin çözümünde dünyada yaklaşık 30 yıl boyunca çok aktif olarak yüzlerce matematikçi çalışmış ve 5000 ile 10.000 sayfa tutan 300-500 makale yayınlanmıştır.

Problem Şubat 1981'de [3] de belirtildiği gibi tamamen çözülmüş ve basit grupların sınıflandırılması bitmiştir. Yukarda bahsettiğimiz gibi bu problem için yaklaşık 10.000 sayfa makale yayınlanmış ve bu makalelerin çoğu bir öncekini kullanmıştır. Bu bakımdan bazı matematikçiler bu çözüme şüphe ile bakmakta ve yapılan ispatları kısaltmak ve doğruluklarını kontrol etmek üzere kolları sıvamışlardır. Bunlara örnek olarak H. Bender'i verebiliriz.

1962 yılında Walter Feit ve John Thompson tarafından yayınlanan bir makale [2] ile bu problemin çözümü büyük bir hız kazanmıştır. Bu makale 255 sayfa olup Pasific Journal of Mathematics'in bir sayısını kaplamıştır. İspatlanan teoremin ifadesi bir satırdır: Mertebesi tek sayı olan her grup çözülebilir bir gruptur.

Basit grupların sınıflandırılması problemi üzerinde ilk çalışmalar mertebesi 1-660 arasında olan basit grupların sınıflandırılması ile başlamış, her grup teker teker incelenmiş daha sonra bu sınırlar 1092' ye kadar genişletilmiştir. Bu aradaki grupların incelenmesi bazı matematikçilerin doktora tezleri olmuştur. Bu incelemeler sırasında Sylow Teoremleri [2] sabit bir n için, mertebesi n olan bir grubun basit olamayacağını göstermek için oldukça etkili bir şekilde kullanılmıştır. Bu sınırlar daha sonraları bilgisayarlarda kullanılarak çok daha büyük sayılara çıkarılmıştır.

1861 yılında Mathieu 5 tane geçişken permütasyon grubu keşfetti. Bu gruplar, basit gruplar teorisinde, pemutasyon gruplarında ve de kodlama teorisinde çok önemli olmuşlardır. 1895 yılında Cole, mertebesi 7920 olan Mathieu grubunun basit olduğunu; 1900 yılında G.A. Miller diğer dört Mathieu grubunun da basit grup olduğunu gösterdi, ve bu grupların sonsuz elemanlı sınıfların hiçbirisine dahil olmadığı da ispat edildi.

Basit gruplardan hiçbir sonsuz sınıfa dahil olmayan gruplara sporadik basit gruplar denir. Bunlardan 26 tane vardır. Sporadik grupların sayısının sadece neden 26 olması ve hatta sayısının sadece sonlu sayıda olması bile kendi başına ilginç buluşlardır. Bu grupların keşfi sırasında bazen mertebesi iki olan elemanların merkezleyenleri oldukça önemli rol oynamış hatta bazı grupların var oldukları buradan hareketle ve bilgisayar kullanarak ispatlanmıştır. Bu grupların içersinde mertebesi 808 017424 794 512 875 886 459 904 961710757 005 754 268 000 000 000 (yaklaşık 10^{54}) olan ve bu büyük mertebesinden dolayı ejderha (monster) da denen bir grup vardır. Bunların yapıları hakkındaki bilgiler bilgisayar kullanılarak elde edilebilmektedir.

Chevalley sonlu cisimler üzerinde Lie cebiri kullanarak sonsuz elemanlı basit grupların bulunduğu yeni sınıflar keşfetmiştir. Daha sonra Chevalley'in metodu 1958-1959 yıllarında Robert Steinberg, Jacques Tits ve D. Hertzig tarafından genişletilmiş ve Chevalley'in bulduklarının da dışında yeni sonsuz elemanlı sınıflar keşfedilmiştir. Bunlardan sonra da Suzuki ve Ree grupları bulunmuştur. Yukardaki grupların ve Jordan tarafından matrisler yöntemiyle verilen dört sınıfın hepsine birden Lie tipi gruplar denir.

Şimdi basit grupların sınıflandırılması teoremini verilim.

Sonlu basit grupların sınıflandırılması:

Verilen her sonlu basit grup aşağıdakilerden birine izomorftur.

1) Mertebesi asal olan gruplar.

2) Alterne permutasyon grupları, Alt (n), n≥5

3) Lie tipi gruplar.

4) 26 tane sporadic grup.

Basit gruplar ve sınıflandırılması hakkında daha fazla bilgi için [3], [4] ve [1]'e bakılabilir. Basit gruplar üzerinde American Math. Monthly 1973 (sayfa 1028) de yayınlanan bir şarkı bile vardır.

KAYNAKLAR

1. M.Aschbacher Fınıte Group Theory Cambridge University press (1986).
2. W. Feit - J. G. Thompson Solvability of groups of odd order Pacific. J. Math B (1963) 775-1029.
3. D. Gorenstein Fınıte Sımple Groups University Series (Plenum Press 1982).
4. D. Gorenstein. The Classification of Fınıte Simple Groups (Plenum Press 1983).
5. M. Suzuki Group Theory I Springer Verlag (1978).