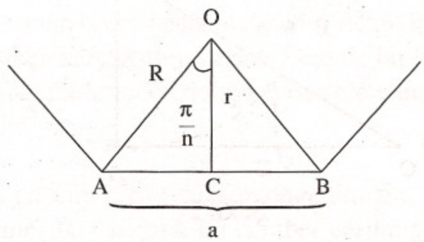
DÜZGÜN ÇOKGENLER VE ÇİZİLEBİLİRLİKLERİ

AZİZE BASTIYALI HAYFAVİ

Düzgün çokgen, tüm kenar uzunlukları eşit ve tüm iç açıları aynı olan çokgenlerdir

n – kenarlı bir düzgün çokgen çember içine çizildiği zaman, merkezden iki komşu köşeye çizilen yarıçapların oluşturduğu merkezi açı

$\left(\frac{360}{n}\right)^{\circ}$ veya $\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ radiandır.



Şekil 1

Şekil 1'de görüldüğü gibi, n – kenarlı bir düzgün çokgenin kenar uzunluğunu, $|AB| = a$, iç çember yarıçapını $|OC| = r$, çevrel çemberin yarıçapını $|OA| = R$, ve alanını da S ile gösterelim. Çokgenimiz n – kenarlı olduğundan $\widehat{AOB}$ açısı $\frac{2\pi}{n}$ radian ve bunun yarısı olan $\widehat{AOC}$ açısı $\frac{\pi}{n}$ radiandır. Böylece AOC dik üçgenini dikkate alarak hemen :

$$\frac{a}{2} = R \sin\frac{\pi}{n} \quad \text{ve} \quad \frac{a}{2} = r \tan\frac{\pi}{n}$$

eşitliklerini yazabiliriz.

Bu eşitliklerden birisini R'ye, ikincisini de r'ye göre çözerek

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{a}{2}\csc\frac{\pi}{n} \quad \text{ve} \quad r = \frac{a}{2\tan\frac{\pi}{n}} = \frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{n}$$

elde edilir.

Tekrar Şekil 1'e bakarak n–kenarlı bir çokgenin alanı için de:

$$S = n\left[AOB \text{ üçgenin alanı}\right] = n\frac{1}{2}|AB|\,.\,|OC|$$
$$= n|AC||OC|$$

olduğu görülür.

Böylece,

(i) kenar uzunluğu cinsinden :

$$S = n\frac{a}{2}r = n\frac{a^2}{4}\cot\frac{\pi}{n}$$

olarak

(ii) R cinsinden :

$$S = n\,R\sin\frac{\pi}{n}\,R\cos\frac{\pi}{n} = n\frac{R^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

olarak

(iii) r cinsinden :

$$S = n\,r\left(\tan\frac{\pi}{n}\right)r = nr^2\tan\frac{\pi}{n}$$

olarak ifade edilebilir.

Örneğin, bir düzgün üçgen için, yani bir eşkenar üçgen için yukardaki formülleri kullanarak;

$$a = R\sqrt{3}, \quad r = \frac{R}{2}, \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6},$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad S = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

formüllerini hemen yazabiliriz.

Çokgenlerle ilgili diğer bağıntıları, yazının sonundaki Tablo'da bulabilirsiniz.

Şimdi de hangi düzgün çokgenlerin çizilebilir olduklarını ve nasıl çizilebileceklerine bakalım.

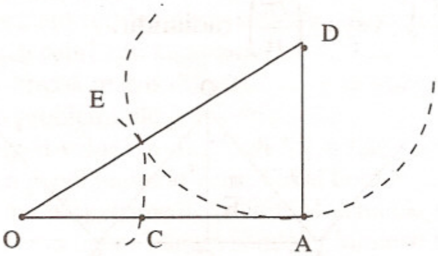
Bazı düzgün çokgenlerin çizimi ta Pythagoras (M.Ö. 530) zamanından beri bilinmektedir. Bunlar, kenar sayıları 3,4,5,6,8,10 veya bu sayıların iki katı olan düzgün çokgenlerdir. Fakat düzgün 7 genin pergel-cetvelle çizilemediğini de farkettiler. Böylece hangi düzgün çokgenlerin Euclid anlamında (yani pergel ve cetvel kullanarak) çizilebilir oldukları konusu gündeme gelmiştir.

Bu soruya yanıt ancak Gauss (1777-1855) tarafından verilebilmiştir. Bunun için evvela Fermat sayılarına tanımlıyalım. $2^{2^n}+1$ şeklindeki sayılar *Fermat sayıları* olarak bilinmektedir ve Fermat tüm bu sayıların asal sayılar olduklarına inanmaktaydı. Hakikaten $n = 0$ için $2^{2^0} + 1 = 3$, $n = 1$ için $2^{2^1} + 1 = 5$, $n = 2$ için $2^{2^2} + 1 = 17$, $n = 3$ için $2^{2^3} + 1 = 257$, $n = 4$ için $2^{2^4} + 1 = 65537$ sayıları asal sayılardır. Fakat $n = 5$ için $2^{2^5} + 1$ sayısının asal olmadığı Fermat'dan bir yüzyıl sonra Euler tarafından ispatlanmıştır. Ayrıca, şimdiye kadar $n = 6,7,8,9$ için de Fermat sayılarının asal olmadıkları ispatlanmıştır. Fakat hala Fermat asal sayılarının sonlu sayıda olup olmadığı sorusu yanıtlanamamıştır.

Fermat sayılarını tanımladıktan sonra tekrar konumuza dönelim. Gauss evvela 17 kenarlı düzgün çokgenin Euclid anlamında çizilebilir olduğunu gösteriyor ve daha sonra da kenar sayıları diğer Fermat asal sayılarına eşit olan düzgün çokgenlerin çizilebildiklerini ispatlıyor. Bununla da kalmayıp, m pozitif bir tam sayı ve $p_1, p_2, ..., p_r$ farklı Fermat asal sayıları olmak üzere, tüm $N = 2^m\, p_1\, p_2, ..., p_r$ kenarlı düzgün çokgenlerin de çizilebilir olduklarını ispatlamıştır. Böylece, şimdiye kadar kenar sayısı asal olan yalnızca 5 tane düzgün çokgen çizilebilmektedir. İki tanesi M.Ö. 530'lardan beri bilinmektedir (düzgün üçgen ve düzgün beşgen) üç tanesi de Gauss tarafından keşfedilmiştir. Bunlar kenar sayıları 17, 257 ve 65537 olan düzgün çokgenlerdir.

Biz bunlardan sadece düzgün beşgenin çizimini vermeğe çalışacağız. Bunun için evvela düzgün on kenarlıyı çizeceğiz ve köşelerini birer atlayarak birleştirerek düzgün beşgenimizi elde edeceğiz.

Verilen R yarıçaplı bir çember içine düzgün ongen çizmek için R uzunluğunu "altın oran"* olarak bilinen oranda bölmek gerekiyor. Bunun için evvela verilen bir doğru parçasını geometrik yoldan altın oranda nasıl böleceğimizi görelim.



Şekil 2

OA verilen doğru parçası olsun, buna dik olarak $AD = \frac{1}{2} OA$ doğru parçasını çizelim (Şekil 2). Eğer $|OA| = R$ ise $|AD| = \frac{R}{2}$ olur. Daha sonra O ile D yi birleştirdiğimizde, hipotenüs uzunluğu $|OD| = \frac{\sqrt{5}}{2} R$ olan OAD dik ongenini elde ederiz. Şimdi D köşesini merkez olarak alıp, yarıçapı $|DA|$ olan daire yayını çizelim. Bu daire yayı DO kenarını E noktasında kessin.

Böylece $|OE| = \frac{\sqrt{5}}{2} R - \frac{R}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} R$

$= (0.618 \ldots)\, R$ olur.

---

* OA doğru parçasını altın oranda bölmek demek, O ve A arasında öyle bir C noktası bulmak demektir ki
OA : OC = OC : CA olsun.

Daha sonra OE yi pergelle OA üzerine taşıdığımızda, AO nin altın bölümünü veren C noktasını bulmuş oluruz. Gerçekten :

$|OA| : |OC| = |OC| : |CA|$

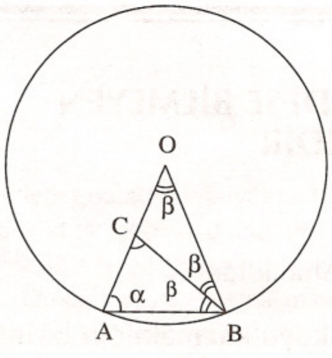
olduğunu hemen gösterebiliriz. Hakikaten :

$$R : \frac{\sqrt{5}-1}{2} R = \frac{\sqrt{5}-1}{2} R : \left(R - \frac{\sqrt{5}-1}{2} R\right)$$

dir.

Altın oran, bir takım geometrik çizimlerin gerçekleştirilmesinde kullanılmasının yanı sıra, doğada, mimari yapılarda da hep karşımıza çıkmaktadır. Örneğin, Atinada bulunan Akropolis'deki Parthenon mabedinde bu oranın kullanımına bolca rastlanmaktadır. Altın oranın hem sıkça karşılaşılmasından, hem de bir takım ilginç özelliklerinden dolayı ayrıca ele alınması gerekir.

Şimdi gelelim bizim düzgün ongenimizin çizimine, R yarıçaplı bir çember verilmiş olsun, bunun içine düzgün ongen çizmeğe çalışacağız. Göstereceğiz ki çemberin yarıçapını altın oranda böldüğümüz zaman büyük olan kısmı bu çemberin içine çizilen düzgün ongenin kenar uzunluğuna eşittir.



Şekil 3

Şekil 3'de görüldüğü gibi çemberin yarıçapı $|OA| = R$ uzunluğunda olsun ve C noktası OA yi altın oranda bölen nokta olsun, yani

$|OA| : |OC| = |OC| : |CA|$

olsun. Göstereceğiz ki $|OC|$ bu çemberin içine çizeceğimiz düzgün ongenin kenar uzunluğudur.

Şekil 3'de görüldüğü gibi A noktasından başlayarak kenar uzunluğu $|OC|$ olan düzgün çokgeni çizmeğe başlarsak tam bir düzgün ongen elde ederiz. $|AB| = |OC|$ dir. Bunun düzgün ongen olduğunu göstermek için OAB ikizkenar üçgeninde tepe açısının 36° olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

OAB ikizkenar üçgeninde, taban açılarını α ile gösterelim CD yi birleştirelim.

Altın bölmeden dolayı : $\dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OC}{CA}$ dır.

Fakat $OA = OB$ ve $OC = AB$ olduğundan aynı oranı

(**) $\dfrac{OB}{BA} = \dfrac{BA}{CA}$ yazabiliriz.

Şimdi OAB ve CAB üçgenlerini dikkate alalım. Bunlar bir açılarının ortak olmasından ve (**) daki oranların eşitliğinden dolayı, benzer üçgenlerdir. Öyleyse $A\widehat{O}B = C\widehat{B}A$ dır. Şekilde bunları β ile gösterdik. Benzerlikten dolayı CAB de ikizkenar üçgendir, yani $CB = AB$ dir. Demekki $OC = AB = CB$ dir.

Böylece OCB nin de ikizkenar üçgen olduğu görülür. Öyleyse taban açıları :

$O\widehat{B}C = A\widehat{O}B = \beta$ dır.

Bir üçgende iç açılar toplamı 180° olduğundan

$$\begin{aligned} 180° &= B\widehat{O}A + O\widehat{B}A + B\widehat{A}O \\ &= \beta + \alpha + \alpha \end{aligned}$$

Fakat $\alpha = 2\beta$ olduğundan

$180° = \beta + 2\beta + 2\beta$

$180° = 5\beta$, $\beta = \left(\dfrac{180°}{5}\right) = 36°$

olduğu görülür.

AB kirişini gören merkezi açı 36° olduğundan, AB kirişi, R yarıçaplı çemberin

İçine çizilen düzgün ongenin kenarıdır. Düzgün ongeni elde ettikden sonra köşelerini bir atlayarak birleştirsek düzgün beşgen elde edilmiş olur. Düzgün 17 kenarlının çizimini Howard EVS'in "A survey of Geometry" Vol. 1 kitabında bulabilirsiniz.

Düzgün çokgenlerde kenar uzunluğu, iç ve dış çember yarıçapları ve alanları ile ilgili bağıntılar

Düzgün Çokgen	R cinsinden		kenar uzunluğu a cinsenden		Alan S	
	kenar uzunluğu	iç çember yarıçapı r:	genel çember yarıçapı R:	iç çember yarıçapı r:	a kenarı cinsinden	R cinsinden
Üçgen	$a=R\sqrt{2}$	$r=\frac{R}{2}$	$R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$S=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$
Dörtgen	$a=R\sqrt{2}$	$r=\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$r=\frac{a}{2}$	$S=a^2$	$S=2R^2$
Beşgen	$a=\frac{R\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$	$r=\frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)$	$R=\frac{a}{10}\sqrt{10+10\sqrt{5}}$	$r=\frac{a}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$S=\frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$S=\frac{5}{8}R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
Altıgen	$a=R$	$r=\frac{R\sqrt{3}}{2}$	$R=a$	$r=\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$S=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$S=\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$
Sekizgen	$a=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$r=\frac{R\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$R=\frac{a}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$	$r=a(1+\sqrt{2})$	$S=2a^2(1+\sqrt{2})$	$S=2R^2\sqrt{2}$
Ongen	$a=\frac{R}{2}\sqrt{5}-1$	$r=\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$R=\frac{a}{2}(1+\sqrt{5})$	$r=\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$S=\frac{5}{2}a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$S=\frac{5}{4}R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
Onikigen	$a=\frac{R}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$r=\frac{R}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$R=\frac{a(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}$	$r=\frac{a}{2}(2+\sqrt{3})$	$S=3a^2(2+\sqrt{3})$	$S=3R^2$

HENDESE BİLEN MÜFTÜ İLE HENDESE BİLMEYEN MÜFTÜNÜN FETVASIDIR

KATİP ÇELEBİ

(Mizanü'l - Hakk fi İhtiyaril - Ahakk'tan

Bir kimse boyu ve eni ve derinliği dört zira bir kuyu kazmak için birini sekiz akçaya tuttu. O da boyu ve eni ve derinliği iki zira olan bir kuyu kazdı ve karşılığında dört akça istedi. Fetva ettirdiler hendese bilmeyen müftü dört akça hakkıdır, dedi. Hendese bilen müftü hakkı bir akçadır deye fetva verdi; doğrusu da budur. Çünkü iki zira kuyu dört zira kuyunun sekizdebiridir; ücretin de sekizde biri olması gerekir. Bunların aslını bilmek isteyen riyaziyat görmeye heves eyleye.