ERDÖS - MORDELL EŞİTSİZLİĞİ

HÜSEYİN DEMİR

Macar matematikçisi Paul Erdös (1913) ve ünlü eşitsizliği ile tanışmam, Columbia Üniversitesi Bölümü'nün son sınıfında bulunduğum 1944 yılına rastlar. Kendisiyle bir matematik toplantısında tanıştırıldım. Tahtaya geçip bir üçgen çizerek içinde bir nokta aldı ve tam ifadesi aşağıda verilen eşitsizliğini benden ispatlamamı istedi. Problemi ilginç bulduğum için ispatlamaya çalıştımsa da başarılı olamadım. Çalışmam yan bir ürün verdi. Onu 1944'te bir dergide yayınladım. Sonraları ün yapmış olan bu eşitsizliğin bir ispatını vermiş olmayı ne kadar isterdim.

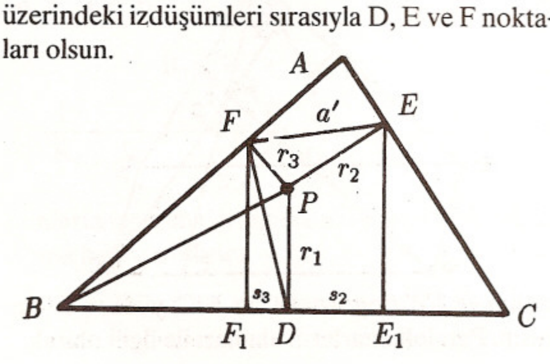
TEOREM (ERDÖS). ABC bir üçgen ve P bunun içinde ya da üzerinde bir nokta olsun. P nin köşelerinden olan R_1, R_2, R_3 uzaklıkları ve kenarlardan olan r_1, r_2, r_3 uzaklıkları

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(r_1 + r_2 + r_3)$$

eşitsizliğini sağlar ve eşitlik ancak üçgen eşkenar ve P merkezinde olduğunda geçerlidir.

Bu teorem ilk kez bir tahmin olarak 1935 yılında American Mathematical Monthly dergisinde yayınlanmış ve ilk ispatı 1937 yılında Mordell tarafından verilmiştir. Bu nedenle bugün eşitsizlik Erdös-Mordell Eşitsizliği olarak tanınmaktadır. Bu eşitsizliğin üç ispatını aşağıda bulacaksınız. Kanımca bunlardan en güzeli Kazarinoff tarafından verilen III. ispattır.

ISPAT I *(Leon Bankoff, 1958).* $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeni içinde alınan P noktasının BC, CA ve AB kenarları üzerindeki izdüşümleri sırasıyla D, E ve F noktaları olsun.



Şekildeki gibi,

$|PD| = r_1$, $|PE| = r_2$, $|PF| = r_3$,

$|EF| = a'$, $|FD| = b'$, $|DE| = c'$

$|PA| = R_1$, $|PB| = R_2$, $|PC| = R_3$

diyelim.

E ve F noktalarının BC üzerindeki dik izdüşümlerine sırasıyla E_1 ve F_1 deyip yazış kolaylığı için $|F_1D| = s_3$, $|E_1D| = s_2$ koyalım. FBDP dörtgeni kirişler dörtgeni olduğu için

$$m(\widehat{FBP}) = m(\widehat{FDP}) = m(\widehat{DFF_1})$$

elde edilir ve $\overset{\triangle}{DFF_1} \sim \overset{\triangle}{PBF}$ olduğu görülür. Buradan

$$s_3 = \frac{b'}{R_2} r_3$$

ve benzer biçimde

$$s_2 = \frac{c'}{R_3} r_2$$

çıkar. Demekki $|FE| \geq |F_1E_1|$ oluşunu ve diğer izdüşümleri de düşünürsek

$$1 \geq \frac{1}{a'}\left(\frac{b'}{R_2} r_3 + \frac{c'}{R_3} r_2\right)$$

$$1 \geq \frac{1}{b'}\left(\frac{c'}{R_3} r_1 + \frac{a'}{R_1} r_3\right) \qquad (1)$$

$$1 \geq \frac{1}{c'}\left(\frac{a'}{R_1} r_2 + \frac{b'}{R_2} r_1\right)$$

elde edilir. Bunları sırasıyla R_1, R_2, R_3 ile çarpıp toplayarak yeni bir düzenleme ile

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 + R_3 \geq\ & r_1\left(\frac{R_2c'}{R_3b'} + \frac{R_3b'}{R_2c'}\right) \\ & + r_2\left(\frac{R_3a'}{R_1c'} + \frac{R_1c'}{R_3a'}\right) \qquad (2) \\ & + r_3\left(\frac{R_1b'}{R_2a'} + \frac{R_2a'}{R_1b'}\right) \end{aligned}$$

buluruz. Oysa parantez içlerinden herbiri $x+\frac{1}{x}$ biçiminde olup

$$x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2-2x+1}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}$$

eşitsizliği nedeniyle

$$x+\frac{1}{x}\geq 2 \qquad (3)$$

dir. Bunun (2) de kullanılması ile istenen

$$R_1+R_2+R_3\geq (r_1+r_2+r_3) \qquad (4)$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi eşitliğin hangi durumda olacağını inceleyelim. Üçgen eşkenar ve P merkez nokta ise eşitliğin olacağı açık. Karşıt olarak, (4)'te eşitlik ancak (1), (2) ve (3)'te eşitlik varsa mümkündür. Bu ise

$$EF//BC,\ FD//AC,\ DE//AB \qquad (5)$$

$$\frac{R_2c'}{R_3b'}=\frac{R_3a'}{R_1c'}=\frac{R_1b'}{R_2a'}=1 \qquad (6)$$

olması demektir. (5)'ten, örneğin ABCB paralelkenarını kullanırsak $|BA|=a'=|DC|$ elde ederiz yani D ve benzer şekilde E ile F kenarların orta noktalarıdır. Yani P, $\overset{\triangle}{ABC}$ nin çevrel çember merkezidir. $R_1=R_2=R_3$ olduğunda (6)'dan $a'=b'=c'$ ve dolayısıyla $a=b=c$ elde edilir, yani üçgen eşkenardır.

İSPAT II. *(L. J. Mordell, 1937)* P nin ABC ye göre ayak üçgeni DEF ve bunun kenar uzunlukları a', b', c' olsun (İspat I'deki şekil).

AEPF kirişler dörtgeni ve sinüs teoreminden

$$R_1=\frac{a'}{\operatorname{Sin} A} \qquad (7)$$

bulunur. PEF ye uygulanan kosinüs teoreminden ise

$$\begin{aligned}a'^2&=r_2^2+r_3^2+2r_2r_3\cos A\\&=r_2^2+r_3^2-2r_2r_3\cos(B+C)\\&=r_2^2+r_3^2-2r_2r_3(\cos B\cos C-\sin B\sin C)\\&=(r_2\sin C+r_3\sin B)^2+(r_2\cos C-r_3\cos B)^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a'^2\geq (r_2\sin C+r_3\sin B)^2$$

$$\Rightarrow a'\geq (r_2\sin C+r_3\sin B) \qquad (8)$$

ABC nin kenar uzunlukları a, b, c ise (1) den

$$R_1\geq \frac{\sin C}{\sin A}r_2+\frac{\sin B}{\sin A}r_3$$

$$\Rightarrow R_1\geq \frac{c}{a}r_2+\frac{b}{a}r_3 \qquad (9)$$

elde olunur. Eşitlik hali ancak

$$r_2\cos C-r_3\cos B=0$$

iken var olup AP | BC olacağı gösterilebilir.

(3) eşitsizliği benzer olarak R_2 ve R_3 için yazılırsa

$$R_2\geq \frac{a}{b}r_3+\frac{c}{b}r_1$$

$$R_3\geq \frac{b}{c}r_1+\frac{a}{c}r_2$$

elde olunur. Bu üç eşitsizlik taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}R_1+r_2+r_3\geq &\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)r_2+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)r_2\\&+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)r_3\end{aligned} \qquad (10)$$

bulunur. Eşitlik, ancak, AP | BC, BP | CA, CP | AB iken yani P ortosantr olduğunda vardır.

Şimdi, $x, y>0$ için

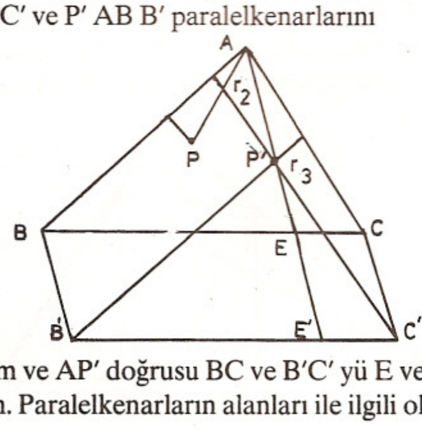
$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2 \qquad (*)$$

eşitliğini kullanalım. Bu, $(x-y)^2\geq 0$ a denk olupdoğrudur ve eşitlik ancak $x=y$ iken vardır. O halde (4) ten

$$R_1+R_2+R_3\geq 2(r_1+r_2+r_3)$$

elde edilir ve eşitlik ancak P noktasının ortosantr ve ABC nin eşkenar olması halinde geçerlidir.

İSPAT III. *(D. K. Kazarinoff, 1957)* P nin A köşesine ait iç açıortayına göre simetriği P′ olsun. P′ACC′ ve P′ AB B′ paralelkenarlarını



çizelim ve AP′ doğrusu BC ve B′C′ yü E ve E′ de kessin. Paralelkenarların alanları ile ilgili olarak

$|P'AC\,C'| + |P'\,AB\,B'| = |EC\,C'\,E'| + |B\,B'E'E|$
$= |BC\,C'\,B'| \le |BC|\,|CC'| = aR_1$ elde olunur ve

$$br_3 + cr_2 \le aR_1$$
$$\Rightarrow R_1 \ge \frac{c}{a} r_2 + \frac{b}{a} r_3$$

çıkar. Eşitlik ancak CC' | BC iken yani AP | BC olduğunda geçerlidir.

Bir ABC üçgeninde H ortosantr ve O çevrel merkez ise ∢ HAC = ∢ OAB olduğu bilindiğinden, AP doğrusu O dan geçmiş olur.

R_1 için elde edilen eşitlik R_2 ve R_3 için yazılıp üç eşitsizlik taraf tarafa toplandığında

$$R_1 + R_2 + R_3 \ge \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) r_1 + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) r_2 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) r_3$$

bulunur ki (*) dan

$$R_1 + R_2 + R_3 \ge 2(r_1 + r_2 + r_3)$$

elde olunur. Eşitlik ise ancak ABC eşkenar ve P çevrel merkezi olduğunda geçerli olur.

ERDÖS'İNKİNE BENZER EŞİTSİZLİKLER

Matematikçilerde benzetme ya da genelleme ile bir teoremden başka teoremler elde etme eğilimi vardır. Durum, konumuz olan eşitsizlik için de geçerlidir. Söz gelimi,

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqslant 2(r_1 + r_2 + r_3) \qquad (1)$$

yazılışındaki toplamların simetrik fonksiyonlar oluşumu gözönüne alan A. Oppenheim R_1, R_2, R_3 ve r_1, r_2, r_3 ün simetrik fonksiyonlarıyla çeşitli eşitsizlikler kurmuştur. Bunların üçünü verelim:

$$R_2R_3 + R_3R_1 + R_1R_2 \ge 4(r_2r_3 + r_3r_1 + r_1r_2) \qquad (2)$$

$$R_1R_2R_3 \ge 8\, r_1r_2r_3 \qquad (3)$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right) \qquad (4)$$

Bunların ispatını öğrenmek isteyenler Kaynak kitabına başvurabilirler.

Öte yandan Macar matematikçisi Fejes Toth (1) eşitsizliğini n-genlere genelleyerek (5) i elde etmiştir.

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_n \ge \left(\sec\frac{\pi}{n}\right)(r_1 + r_2 + \ldots + r_n) \qquad (5)$$

Bunun n = 3 için özel hali (1) dir.

(1) in uzayda bir genellemesi neden olmasın? Dörtyüzlüler için şu tahmini yapamaz mıyız?

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \ge 3(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \qquad (6)$$

Bu tahmin yanlış da çıkabilir.

ALIŞTIRMALAR

Bir ABC üçgeninde P noktası yerine

a) O çevrel merkezi

b) I iç merkezi

c) H ortosantr

d) C ağırlık merkezi

aldığınızda (1) eşitsizliği hangi eşitlikleri verir?

ERDÖS'ÜN BAŞKA BAZI EŞİTSİZLİKLERİ

1. Çevrel yarıçapı R ve dış yarıçapları r_a, r_b, r_c olan bir ABC üçgeninde

$$\frac{3}{2} R \le \max(r_a, r_b, r_c) \qquad (1949)$$

2. Geniş açılı olmayan, çevrel ve iç yarıçapları R, r, yükseklikleri h_a, h_b, h_c olan bir ABC üçgeninde

$$R + r \le \max(h_a, h_b, h_c)$$

3. Bir ABC üçgeninde içteki bir P noktasını köşelere birleştiren doğrular karşıt kenarları D, E, F de keserse

$$|PD| + |PE| + |PF| \le \max(a, b, c) \qquad (1935)$$

4. P, düzgün bir $A_1\, A_2 \ldots A_n$ n-geninin bir iç noktası ise

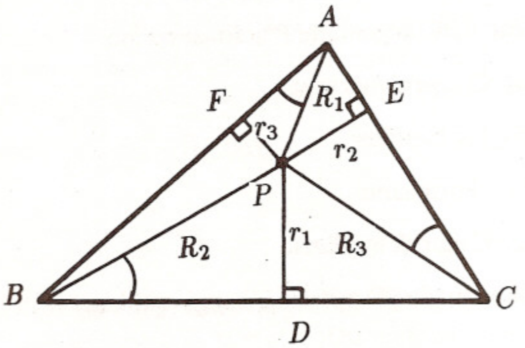
$$\frac{n-1}{n}\pi < \measuredangle\, A_iP\,A_j \le \pi \qquad (1943)$$

BİR UYGULAMA

Şimdi de Erdös-Mordell eşitsizliğini 1991 Uluslararası Matematik Olimpiyatı (IMO 1991) sorularından birine uygulayarak ne ölçüde kullanışlı olduğunu görelim.

SORU: Bir ABC üçgeni ile bu üçgenin içinde herhangi bir P noktası verilmiş olsun.

$\widehat{PAB}$, $\widehat{PBC}$, $\widehat{PCA}$ açılarından en az birinin 30° den küçük ya da eşit olduğunu gösteriniz.



ÇÖZÜM: Her üç açının da 30° den büyük olduğunu varsayalım. Bu durumda üçünün toplamı 180° den küçük ikisinin toplamı 60° den büyük olacağı için açılardan herbiri 120° den küçük olacaktır. Böylece 30° ile 120° arasında kalan bu açılar için

$$\sin\alpha_1 = \frac{r_3}{R_1} > \frac{1}{2}, \ \sin\alpha_2 = \frac{r_1}{R_2} > \frac{1}{2},$$

$$\sin\alpha_3 = \frac{r_2}{R_2} > \frac{1}{2}$$

elde edilir. Demek ki

$$R_1 < 2r_3, R_2 < 2r_1, R_3 < 2r_2$$

ve dolayısıyla da

$$R_1 + R_2 + R_3 < 2(r_1 + r_2 + r_3)$$

elde edilir. Bu ise Erdös-Mordell eşitsizliği ile çelişir. Öyleyse açılardan en az biri 30° den küçük ya da eşit olmalıdır.

Kaynak

Bottama ve diğerleri, *Geometric Inequalities,* Wolters-Noordhoff Publishing, Gromingen, 1969, The Netherlands.

ERDÖS SAYISI NEDİR?

Paul Erdös başkalarıyla birlikte çalışmayı çok seven bir matematikçi. Ayda 15 yer dolaşan Erdös'ün ortak makale yazdığı matematikçilerin sayısı 200 ün çok üstünde. Egale edilmesi bile düşünülemiyecek bir rekor. Erdös'e şu ya da bu ölçüde yakın birçok matematikçinin bulunuşu bu yakınlığın ölçüsünü belirten "Erdös sayısı"nı çıkarmış ortaya. Bunu şu v fonksiyonu ile tanımlayalım:

M bir matematikçi olduğuna göre,

M Erdös ise $\nu(M) = o$

M Erdösle ortak makale yazmışsa $\nu(M) = 1$

M Erdösle ortak makale yazmamış ama Erdösle ortak makale yazan biriyle ortak makale yazmışsa $\nu(M) = 2$, v. b...

Eğer $\nu(M) = m$ ise **"Matematikçi M nin Erdös sayısı m dir"** diyoruz,

Söz gelimi Einstein'ın Erdös sayısı 2, çünkü Einstein Erdösle ortak makale yazmamış ama Straus'la yazmış, Straus da Erdösle yazmış. ν(Gauss) ın tanımlı olup olmadığı henüz belirlenememiş. Şimdiye dek belirlenebilen en büyük Erdös sayısı 12. Peki siz Erdös sayınızı biliyor musunuz?