MATEMATİKTE BENZETME

TUĞRUL TANER

İsviçre'li bir matematikçi olan Jaques Bernoulli (1654-1705) toplamı bilinmeyen pek çok serinin toplamını ilk kez hesaplayabilmiş ancak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

serisinin toplamını bulmak için harcadığı bütün çabaların boşa gittiğini, eğer birisi bu toplamı hesaplayabilirse kendisine yazmasını istemiştir.

Bernoulli ile aynı kasabada doğmuş olan L. Euler (1707-1783) bir benzetmeden yararlanarak toplamın tam değerini hesaplamıştır. Burada Euler'in hatalı da olabilecek bu cesur benzetme tekniğini inceleyeceğiz.

Baş katsayısı a_n olan

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n x^n$$

polinomunun $\alpha_1\ \alpha_2, \dots, \alpha_n$ köklerinin herbiri 0'dan farklı olsun.

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

eşitliği geçerlidir. $x = \frac{1}{y}$ yazarak

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = \frac{1}{y^n} (a_n + a_n - 1y + \dots + a_0 y^n)$$

elde ederiz. Bu eşitliğin ikinci yanında bulunan parantez içindeki ifade

$$a_o (y - \frac{1}{\alpha_1})(y - \frac{1}{\alpha_2}) \dots (y - \frac{1}{\alpha_n})$$

çarpımına eşit olacağından

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = a_0 (1 - \frac{x}{\alpha_1})(1 - \frac{x}{\alpha_1}) \dots (1 - \frac{x}{\alpha_n}) \quad (2)$$

eşitliği de geçerlidir. Bu eşitlikte x'in katsayılarını eşitleyerek

$$a_1 = -a_0 (\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n}) \quad (3)$$

bulunur.

Bu sonuçları sıfırdan farklı kökleri $\beta_1, -\beta_1, \beta_2, -\beta_2, \dots, \beta_n, -\beta_n$ olan

$$b_0 - b_1 x^2 + b_2 x^4 - \dots + (-1)^n b_n x^{2n} \quad (4)$$

polinomuna uygulamak için önce (2)'den

$$b_0 - b_1 x^2 + b_2 x^4 - \dots + (-1)^n b_n x^{2n} = b_0 (1 - \frac{x^2}{\beta_1^2})(1 - \frac{x^2}{\beta_2^2}) \dots (1 - \frac{x^2}{\beta_n^2}) \quad (5)$$

yazıp iki yanda x^2'nin katsayılarını eşitleyerek (3)'deki gibi

$$b_1 = -b_0 \left(\frac{1}{\beta_1^2} + \frac{1}{\beta_2^2} + .. + \frac{1}{\beta_n^2} \right) \tag{6}$$

bulunur. Euler,

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + ...$$

sonsuz toplamını (4) polinomuna benzeterek ve $\frac{\sin x}{x}$'in köklerinin

$$\pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi, ...$$

olduğunu gözönüne alarak (6)'dan benzetme yoluyla

$$-\frac{1}{3!} = -\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + ... + \frac{1}{(n\pi)^2} + ... \right) \tag{7}$$

ve buradan da

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} + ... \tag{8}$$

olmasını ummuştur.

Euler başka yollardan sağdaki toplamı ondalık ilk 6 basamağa kadar doğru olarak hesaplamış ve bunun $\frac{\pi^2}{6}$ ile ondalık ilk 6 basamağa kadar aynı olduğunu saptamıştır. Ancak bu bir kanıt değil, kanıtlamak için uğraşmaya değer bir ifadenin elde edilişidir. Euler, aynı tekniği kullanarak toplamı bilinen başka serilerin toplamını doğru olarak elde etmiştir. Doğal olarak bunlar da kanıt değildir. En sonunda başka bir yoldan (8) eşitliğinin doğru olduğunu kanıtlamıştır.

Kaynak: Thomas Tymoczko, *New Directions in the Philosophy of Mathematics,* Birkhäuser 1986, s. 108-110.

ÇÖZMECE

Abecetik olarak adlandırabileceğimiz bu tür harfler yerine eşitliği sağlayacak biçimde rakamlar bulunması istenmektedir. (. çarpmayı göstermektedir.)

a) M . K . (ATA+TÜRK) = (10 + 11) . 1938

b) M . K . (ATA+TÜRK) = 10.11.1938

(**Hazırlayan H. Demir)**

Yanıtlar 28 inci sayfadadır.