GEOMETRİK EŞİTSİZLİKLER

EMRE ALKAN

Bu yılki Olimpiyat takımımızın elemanlarından Emre Alkan bir dizi geometri problemini derleyip kendi çözümleriyle beraber Matematik Dünyası'na yolladı. Çözümlerin güzelliği bir yana geçen sayıda gördüğünüz eşitsizliklerin kullanılması da ilginç. Aşağıda bu problemleden bir demet bulacaksınız. Kısa bir açıklama: Bir ABC üçgeninde h_a, h_b, h_c yükseklikleri, r içteğet çemberin yarıçapını,

R çevrel çemberin yarıçapını, $u = \frac{1}{2}(a+b+c)$ yarıçevreyi ve S alanı gösteriyor.

1. Bir üçgenin yüksekliklerinden en az biri içteğet çemberin yarıçapının üç katından büyük veya eşittir. Gösteriniz.

ÇÖZÜM: Önce $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$ olduğunu gösterelim. Üçgenin alanı için

$$S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c = ur$$

bağıntılarından:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2s} + \frac{b}{2s} + \frac{c}{2s} = \frac{2u}{2ur} = \frac{1}{r}.$$

Üç pozitif sayının toplamı $1/r$ ye eşitse, en az biri $1/3r$ den küçük eşit olmak zorundadır, yani h_a, h_b, h_c den en az biri $\geq 3r$ olmalıdır.

2. Bir üçgenin içteğet çemberinin kenarlara değdiği noktalardan herbirinin karşısındaki köşe ile birleştirildiğinde oluşan doğru parçalarının uzunlukları s_a, s_b, s_c olsun.

$$18\, S^2 \leq R(s_a + s_b + s_c)(s_a^2 + s_b^2 + s_c^2)$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: s_a, s_b ve s_c yi kullanmak zor olacağından daha kolay uğraşılabilecek uzunluklar bulmalıyız. $h_a \leq s_a$, $h_b \leq s_b$, $h_c \leq s_c$ olduğunu gözönüne alırsak,

$$(h_a + h_b + h_c)(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \leq$$
$$(s_a + s_b + s_c)(s_a^2 + s_b^2 + s_c^2)$$

bulunur. Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliğine göre,

$$3\sqrt[3]{h_a h_b h_c} \leq h_a + h_b + h_c$$

$$3\sqrt[3]{h_a^2 h_b^2 h_c^2} \leq h_a^2 + h_b^2 + h_c^2$$

Taraf tarafa çarparsak

$$9h_a h_b h_c \leq (h_a + h_b + h_c)(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2).$$

Kanıtı tamamlamak için son olarak $2S^2 = Rh_a h_b h_c$ bağıntısını gösterelim. Bunun için $S = \frac{abc}{4R}$ eşitliğinden yararlanacağız:

$$8S^3 = abch_a h_b h_c = 4RSh_a h_b h_c$$

O halde

$$2S^2 = Rh_a h_b h_c.$$

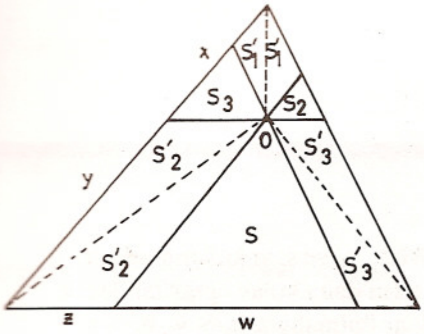
Eşitlik durumunun ancak eşkenar üçgende olduğunu kolayca görebiliyoruz.

3. Bir üçgenin iç bölgesinde alınan bir O noktasından kenarlara paraleller çiziliyor. Oluşan üçgenlerin alanları S_1, S_2, S_3 olsun. büyük üçgenin alanı S olmak üzere,

$$(SS_1S_2S_3)^{1/2} \leq S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_1$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: Alan ve kenarları şekildeki gibi adlandıralım.



Benzerlikten $\frac{y}{x+y} = \frac{w}{w+z}$, dolayısıyla $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$ buluruz.

Alanları S_2' ve S_3 olan üçgenlerin yükseklikleri aynıdır; o halde

$\frac{S_3}{S_2'} = \frac{x}{y}$, benzer yolla $\frac{S_2'}{S_1} = \frac{z}{w}$

bulunur. Yukardaki eşitlikten,

$\frac{S_3}{S_2'} = \frac{S_2'}{S_1}$, yani $S_2' = \sqrt{S_3 S_1}$ çıkar.

Diğer üçgenler için de yaparsak

$S_1' = \sqrt{S_2 S_3}$, $S_3' = \sqrt{S_1 S_2}$ ve

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + 2S_1' + 2S_2' + 2S_3'$$
$$= (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$$

elde edilir. Bu durumda göstermek istediğimiz eşitsizlik;

$$(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})\sqrt{S_1}\sqrt{S_2}\sqrt{S_3} \le S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_1$$

eşitsizliğine dönüşür.

$x, y, z > 0$ için $2xy \le x^2 + y^2$ eşitsizliğini z^2 ile çarpalım; $2xyz^2 \le x^2z^2 + y^2z^2$. Aynı işlem y, z ve z, y için yapılıp toplanırsa

$$(x+y+z)xyz = x^2yz + xy^2z + xyz^2$$
$$\le x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 ,$$

$x = \sqrt{S_1}$, $y = \sqrt{S_2}$, $z = \sqrt{S_3}$ alınırsa da istenen eşitsizlik gösterilmiş olunur.

Bu problemde eşitlik hali $S_1 = S_2 = S_3$ iken, bunun sonucu olarak da O noktası üçgenin ağırlık merkeziyken vardır.

BAZI TEMEL EŞİTSİZLİKLER: Geçen sayıdaki sorulara yanıtlar:

Albert Erkip

1. Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanıyoruz:

$$d^2 = (2x+3y)^2 = (2\,.\,x + \tfrac{3}{2}\,.\,2y)^2$$
$$\le (2^2 + (\tfrac{3}{2})^2)\,.\,(x^2 + 4y^2) = \frac{25}{4}$$

O halde $-\frac{5}{2} \le d \le \frac{5}{2}$ olmalıdır. Eşitsizliğin eşitlik durumu $x^2 + 4y^2 = 1$ koşulu altında incelenirse $(x, y) = \pm\,(\frac{4}{5}, \frac{3}{10})$ için d nin $\pm\frac{5}{2}$ değerlerini aldığı görülür., yani maksimum ve minimum d değerleri $\pm\frac{5}{2}$ dir. Problemin geometrik yorumu için $x^2 + 4y^2 = 1$ elipsi ile $2x + 3y = d$ doğrularının konumunu inceleyiniz.

2.

$$a^k b^n = \overbrace{a \ldots a}^{k\text{-tane}} \,.\, \overbrace{b \ldots b}^{n\text{-tane}} \le \left(\frac{\overbrace{a + \ldots a}^{k\text{-tane}} + \overbrace{b + \ldots + b}^{n\text{-tane}}}{k+n}\right)^{k+n}$$

$$= \left(\frac{ka+nb}{k+n}\right)^{k+n}$$

Burada Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliğini kullandık.

3. Cauchy-Schwarz eşitsizliğini iki kere kullanacağız:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i d_i\right)^4 = \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i b_i)(c_i d_i)\right)^2$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2 d_i^2\right)^2$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^4\right)\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^4\right)$$

4. Üçüncü problemde a_i, b_i, c_i, d_i yerine $(a_ib_ic_i)^{1/4}, a_i^{3/4}, b_i^{3/4}, c_i^{3/4}$ alalım.

$$(\sum_{i=1}^{n} (a_ib_ic_i)^{1/4} a_i^{3/4} b_i^{3/4} c_i^{3/4})^4 \leq$$

$$(\sum_{i=1}^{n} a_ib_ic_i)(\sum_{i=1}^{n} a_i^3)(\sum_{i=1}^{n} b_i^3)(\sum_{i=1}^{n} c_i^3)$$

gerekli sadeleştirmeleri yapınca sonuç çıkacak.

5. $x + y + z = 1$ ve herbiri pozitif olduğundan x, y, z den en az biri $\frac{1}{2}$ den küçük olacaktır. İfade x, y, z ye göre simetrik olduğundan buna x diyebiliriz. yani $x < \frac{1}{2}$

$d = xy + yz + xz - 2xyz = x(y + z) + (1 - 2x)yz.$

Soldaki eşitsizlik $0 < d$ bu durumda hemen görülüyor. Sağ taraf için Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliği ile $y + z = 1 - x$ olduğunu kullanırsak;

$$d = x(y + z) + (1 - 2x)yz$$
$$\leq x(y + z) + (1 - 2x)(\frac{y+z}{z})^2$$
$$= x(1-x) + (1-2x)(\frac{1-x}{2})^2$$
$$= \frac{1}{4}(1 + x^2-2x^3).$$

Yine Aritmetik-Geometrik Ortalama eşitsizliğini kullanalım;

$$x^2 - 2x^3 = x \;.\; x \;.\; (1 - 2x) \leq (\frac{x + x + 1 - 2x}{3})^3 = \frac{1}{27}$$

Birleştirirsek,

$$d \leq \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{27}) = \frac{7}{27}$$

bulunur. Burada eşitlik ancak $y = z$ ve $x = x = 1 - 2x$, yani $x = y = z = \frac{1}{3}$ durumunda vardır.

6. Orta satıra Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygulayacağız:

$$a^6 = (\sum_{n=1}^{5} n^3x_n)^2$$
$$= (\sum_{n=1}^{5} (nx_n)^{1/2} \,.\, (n^5x_n)^{1/2})^2$$
$$\leq (\sum_{n=1}^{5} nx_n)(\sum_{n=1}^{5} n^5 x_n) = a \,.\, a^5 = a^6$$

Demek ki eşitlik durumundayız, bu da

$(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_1})$, $5\sqrt{2x_2}, \sqrt{2^5x_2})$, $(\sqrt{3x_3}, \sqrt{3^5x_3})$,

$(\sqrt{4x_4}, \sqrt{4^5x_4})$ ve $(\sqrt{5x_5}, \sqrt{5^5x_5})$ çiftlerinin orantılı olmasını gerektiriyor.

Bu durum için ise x_n lerden en az dördünün sıfır olması gerekiyor. Denklemlerde yerine koyarak tüm $(x_1, x_2, ..., x_5)$ çözümlerini bulabiliriz, bunlar:

$(0, 0, 0, 0, 0)$, $a = 0$;
$(1, 0, 0, 0, 0)$, $a = 1$;
$(0, 1, 0, 0, 0)$, $a = 2$;
$(0, 0, 1, 0, 0)$, $a = 3$;
$(0, 0, 0, 1, 0)$, $a = 4$;
$(0, 0, 0, 0, 1)$, $a = 5$.

Bilimde mutlu raslantı ona hazır kafalar için vardır.

L. Pasteur
