

MATEMATİK VE BELİT SİSTEMLERİ

MEHMET SAİT EROĞLU

Herhangi bir matematik kitabını karıştırdığımızda, genelde vurgulanmış olarak yazılan üç kelimeye sıkça rastlarız; bunlar *tanım*, *teorem* ve *kanıttır*. Her tanımda açıklanan kavram, söz konusu kuramın daha önce açıklanmış kavramları ile yapılırken, her teoremin kanıtı, doğruluğu bilinen önermelere dayanır. Bu durumda besbelli ki *her kavram açıklanmış ve her önerme kanıtlanmış olmaz!* Her matematik kuramın tanımsız kavramları ve kanıtsız olarak doğruluğu kabul edilen belitleri (aksiyomları veya ilksavları) olacaktır. En iyisi, bundan sonraki açıklamalara da ışık tutması açısından, işe bir *belit sistemi* vererek başlayalım:

Tanımsız kavramlar (terimler): *pat*, *çat*.

Belit 1: *Her çat, patlardan oluşan bir kümedir.*

Belit 2: *En az iki pat vardır.*

Belit 3: *p ve q pat iseler, p ve q yu içeren bir tek çat vardır.*

Belit 4: *L bir çat ise, L nin ögesi olmayan en az bir pat vardır.*

Bu verilerin tümü B_4 ile göstereceğimiz bir *belit sistemi* oluşturur. Ancak belitlere baktığımızda *her, küme, içermek, iki, bir, var ise* gibi başka tanımsız terimlerin varlığını görüyoruz. Bunlardan ikisi "küme" ve "içerme", kümeler kuramının tanımsız terimleridir. Böyle olmakla birlikte, fazla ayrıntıya girmemek için, belitlerdeki tüm tanımsız terimlerin *mantığın tanımsız terimleri* olduğunu söyleyelim.

Her belit sisteminden uyması gereken isteklerimiz olacak, örneğin *çelişkisizlik* gibi. Bunların tartışılabilmesi için, tam açıklamasını sonraya bırakacağımız iki kavrama gereksinimiz var. B belit sistemi verildiğinde, bu sistemin ve mantığın belirsiz terimleriyle belirli kurullarla (bunlara ilerde değinilecek) oluşturulan önermelere *B-önermeleri* diyeceğiz. Bir B -önermesi olan S eğer *mantıksal biçimde B-den çıkıyorsa* (bunun ne olduğunu aşağı yukarı biliyoruz. İlerde tam olarak açıklanacak) S, B den çıkar diyeceğiz ve S, B sisteminin bir teoremi olur. Örneğin "Her pat en az iki farklı çat tarafından içerilir" önermesi B_4 ten çıkar, görelim.

TEOREM 1. Her pat en az iki farklı çat tarafından içerilir.

KANIT: p herhangi bir pat olsun. Belit 2 den dolayı bir başka q patı vardır. Belit 3 ten dolayı p ve q yu içeren bir tek L çatı vardır. Belit 4 ten dolayı L nin içermediği bir r patı vardır. Yine Belit 3 ten dolayı p ve r yu içeren bir tek L' çatı vardır. L ve L' pyi içerirler, ancak birbirinden farklıdır.

Eğer bir belit sistemini, belirsiz terimlerine bizi ilgilendiren bir alanda *anlamlar* vererek, belitlerini söz konusu alanda doğru olmasını istediğimiz önermelere dönüştürecek biçimde *yorumlayamıyorsak*, böyle bir belit sistemiyle uğraşmanın hiçbir anlamı kalmaz. B belit sisteminin her Y yorumu bu sistemin bir $M(Y)$ modelini belirler. B den mantıksal biçimde çıkan her önermesi her Y yorumu için $M(Y)$ modelinde bir teoreme dönüşür. İşte bu belitlik yöntemin avantajıdır. Değişik modellerde karşımıza değişik önermeler olarak çıkan teoremlerin ortak yanını bulmak ve bir kanıtla tümünün kanıtını vermek; bu büyük bir kazançtır.

Kuramsal açıklamalara devam etmeden B_4 sistemine dönelim ve bazı yorumlarına bakalım.

Y_2 : Dört farklı a, b, c, d nesnesi patları oluştursun. Çatlar ise $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}$ kümeleri olsun. Bu yorumda tüm B_1, \dots, B_4 belitleri doğru önermelerdir.

Y_1^* Patlar Y_1 deki gibi; çatlar Y_1 deki çatlar ve \emptyset (boş küme).

Y_2 Patlar düzlemdeki noktalar, çatlar düzlemdeki doğrular.

Y_3 Patlar, düzlemde verilen bir açık dairenin, örneğin merkezi orijinde olan birim dairenin çember dışında kalan noktaları, çatlar ise bu dairenin kirisleri.

Y_4 Patlar üç farklı a, b, c nesnesi, çatlar $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$.

Y_5 Patlar bir A şehrinin insanları; çatlar bu insanlar arasında Belit 1 - Belit 4 doğru olacak biçimde oluşturulmuş dernekler.

Yukarıda kanıtlanan teorem $M(Y_2)$ modelinde "Düzlemde her noktadan en az iki doğru geçer", $M(Y_3)$ de "Açık dairenin her noktasından en az iki kiris geçer", $M(Y_5)$ de "A şehrinde herkes en az iki derneğin üyesidir" teoremlerine dönüşür. $M(Y_1)$, $\neg, M(Y_5)$ te beş değişik teorem gibi görünmelerine

karşın hepsi için B_4 sistemindeki teorem ortak tabandır ve salt onun kanıtlanması yeterlidir.

B_4 sistemine

"Belit 5: L bir çatsa ve p patını içermiyorsa, p yi içeren ve L ile ortak ögesi olmayan bir ve bir tek L' çatı vardır."

belitini ekleyerek elde ettiğimiz sisteme B_5 diyelim. B_4 sistemine

"Belit 5*: L bir çatsa ve p patını içermiyorsa, p yi içeren ve L ile ortak ögesi bulunmayan en az iki farklı çatı vardır."

beliti eklenerek elde edilen sistem B_5^* diyelim. Artık Y_1^* ve Y_4, B_5 ve B_5^* için bir model oluşturamazlar. Ayrıca aşağıdaki önermeler kolayca B_5 den çıkar.

TEOREM 2: Her çat en az iki pat içerir.

TEOREM 3: En azından dört pat vardır.

TEOREM 4: En azından altı çat vardır.

Yine Y_2, B_5 in bir yorumudur, ancak B_5^* in değil ve tersine Y_3, B_5^* in bir yorumudur ancak B_5 in değil. İki çata, ortak ögeleri yoksa birbirine *koşut* diyelim. L bir çat ve p patını içeriyorsa, L, p den geçiyor diyelim. Bu tanımlarla Belit 5 şöyle de söylenebilir: L, p patından geçmeyen bir çatsa, p den geçen ve L ye koşut olan birtek çat vardır. Kuşkusuz bu aşamada B_5 sistemiyle Öklidik Geometriye, B_1^* sistemiyle Öklidik olmayan geometriye doğru yol almakta olduğumuzu farketmişsinizdir.

Bir B belit sisteminin *çelişkisiz* olmasını isteyeceğiz. Eğer B den bir B önermesi olan S ve onun olumsuzu $\sim S$ çıkarılabiliyorsa bu bir çelişkidir ve böyle bir durumda tüm B -önermeleri B den çıkar ve bu sistem tüm anlamını yitirir. Eğer hiçbir S için B den hem S ve hem de $\sim S$ çıkarılamıyorsa B ye *çelişkisiz* diyeceğiz (burada söz konusu olan S ler B -önermeleridir). İyi ama, bir B belit sisteminin *çelişkisiz olduğu nasıl gösterilir?* Şansımız varsa biraz uğraştan sonra S ve $\sim S$ yi B den elde eder çelişkiye ulaşırız. Onca uğraştan sonra bir çelişkiye ulaşmamışsak, bu B nin çelişkisiz olması anlamına gelir mi? Asla! Genelde elimizde bir B -belit sisteminin doğru önermelerini veya yanlış önermelerini veren yöntemler yoktur; böyle yöntemler varsa B ye *belirlenebilir* diyelim. Gruplar kuramı, cisimler, sıralanmış cisimler, örgüler, sıralanmış yapılar belirlenemez; buna karşın değişimli gruplar ve tümel sıralanmış kümeler belirlenebilir yapılardır. Kuram belirlenebilir bile olsa, tüm teoremleri listelemek

genelde olanaksızdır. Bazan S ve $\sim S$ öyle karmaşık ve değişik biçimde karşımıza çıkabilir ki, bunlar gözümüze bakarken biz çelişkiyi farketmeyebiliriz. Dolayısıyla mantıkçılar ve matematikçiler başka bir yol izliyorlar. B nin bir Y yorumu varsa B ye *yorumlanabilir* diyelim. $M(Y)$ modelini seçtiğimiz B' sistemi çelişkisizse kuşkusuz B de çelişkisiz olacaktır, böylece *görel çelişkisizlik* kavramına ulaşırlar ve çelişkisizliğine güvenimizin fazla olduğu alanlarda modeller aranır. Hatta belirli varsayımlar altında çoğu mantıkçı ve matematikçi için B nin yorumlanabilir olması çelişkisiz olmasıyla eş anlamlıdır.

Bir B belit sisteminin hiçbir beliti, geriye kalan belitlerle oluşturulan sistemden çıkmıyorsa, B ye *bağımsız* denir. B nin belitleri olmayan her B -önermesi S, B nin belitlerine eklenerek elde edilen B' belit sistemi bağımsız değilse, B ye *tam* denir. Başka bir deyişle her B -önermesi S için ya S ya da $\sim S, B$ den çıkıyorsa B tamdır. Örneğin B_4 belit sistemi tam değildir, çünkü S olarak Teorem 3 deki önermeyi alırsak B_4 den ne S yi ne de $\sim S$ yi çıkarabiliriz.

Bir belit sisteminin yukarıda sıralanan özellikleri içerisinde en önemlisi ve vazgeçilmez olanı çelişkisizliktir. Bağımsızlık bazan istenmeyebilir; özellikle önemli teoremlere çabuk ulaşılmak istendiğinde, veya çok karmaşık bir belit daha kolay parçalara ayrılmak istendiğinde bağımsızlıktan vazgeçilebilir. Ancak tüm isteğimiz belli bir alanın tüm teoremlerini kanıtlamaksa belit sisteminin tam olması zorunludur.

Belit sistemleri nasıl oluşur? Önce ilgilendiğimiz bir alan vardır. Bu alanda yeterince bilgi edindikten sonra, önemli kavramları ve bağıntıları belirleyecek düzeye geliriz. Örneğin söz konusu olan Öklidik Geometrisi olsun. Seçeceğimiz önemli kavramlar belit sisteminin tanımsız terimlerini ve seçtiğimiz temel önermeler belitleri vereceklerdir. Ancak seçilen tanımsız terimler çıkış noktasındaki özel alandaki anlamlardan arındırılacaklardır. Örneğin Hilbert beş tanımsız terim: nokta, doğru, düzlem, arasında, eşleşik kullanırken Pieri iki tanımsız terim (nokta, hareket) ve Veblen iki tanımsız kavram (nokta, sıra) kullanmıştır.

Hiçbir zaman, rastgele bir belit sistemiyle dam üstünde saksakağan türü işe başlanmaz. Ancak belli bir alandan çıkarak bir belit sistemine ulaştıktan sonra, ilgi alanını daha iyi kavramaya da yardımcı olduğu için, elde edilen sistemden bazı belitleri çıkararak, değiştirerek veya zayıflatarak yeni belit sistemlerine geçilir. Matematikte bu sıkça izlenen bir yoldur.