

BİLGİSAYARLAR İSPAT PEŞİNDE

ARTURO SANGALLI

ÇEVİREN: HASAN DAVULCU

Yükün zamana kadar herhangi bir ispatın doğruluğunu matematikçiler kendileri kontrol edebiliyorlardı. Ancak uzun yıllar çözümsüz kalan bazı problemlerin çözümü için bilgisayarlar yardımıyla yararlanmaya başladıklarında artık bu yolla elde ettikleri yanıtları kimse kontrol edemiyor (bilgisayar hariç).

1976 yılında, Illinois Üniversitesinden iki matematikçi, Kenneth Appel ve Wolfgang Haken dört-renk problemini çözdüler. (Bkz. Matematik Dünyası, Cilt 1, Sayı 2, Sayfa 7) Dört-renk problemi 1852'de Londra Üniversitesinin bir öğrencisi olan Francis Guthrie tarafından, kağıda çizilebilecek herhangi bir haritanın renklendirilmesinde, birbirine komşu iki ülkenin farklı renklerde olması koşuluyla, boyanabilmesi için dört rengin yeterli olduğunu sezinmesi ile ortaya atılmıştı. Sonra bunun matematiksel olarak ispatlanıp ispatlanamayacağını sordu. Yüz yıldan uzun bir süre uğraşıldığı halde, Appel ve Haken dört rengin yeterli olduğunu ispatlayana kadar, kimse bu soruya cevap veremedi. fakat Guthrie'nin kafasındaki ispatın Appel ve Haken'in ispat yöntemi olduğunu hiç sanmıyoruz. İspatın bazı bölümlerinin bilgisayar yardımı ile yapılmasının yanında, onun doğruluğunu veya yanlışlığını da bilgisayar yardımı olmaksızın anlamamız imkansız.

Daha önce örneği görülmemiş bir deneyim olan bilgisayarların matematiksel ispatlar için kullanılması matematikçiler arasında şiddetli münakaşalara yol açtı ve birçok teorik ve felsefi soruları ortaya çıkardı. Bilgisayarın veya programcısının bir hata yapmadığını nereden bilebiliriz? Bu ispatlar bazı yönleri ile geleneksel kalem-kağıt ispatlarından farklı mı? Acaba bazı matematiksel doğruluklar 'a priori' değil de deneyime mi bağlı?

İlerleyen yıllarda bilgisayar yardımı ile yapılan diğer ispatlar önerildi ve bunların geçerliliğine

dair tartışmalar sürdü durdu. Aralık 1988 tarihli bir **New York Times** gazetesinin makalesinin başlığında soruluyordu; "Bir matematiksel ispat, eğer onu kimse kontrol edemiyorsa bir ispat mıdır?" Makalede, geometrinin ikiyüz yıllık bir sorusu olan 10. dereceden projektif düzlemlerin var olup olmadığı probleminin sonunda bir süper bilgisayarın hiç de küçümsenemeyecek yardımıyla, böyle bir düzlemin var olmadığı şeklinde ispatlanması konu ediliyordu. Bilgisayarla yapılan bir matematiksel ispat nedir? Genelde matematiksel ispat nedir?

1928 yılında ünlü İngiliz matematikçisi George Hardy matematiksel ispatların doğalarını ve amaçlarını daha çok şiirsel bir dille şöyle açıkladı.

Hardy matematikçiyi ilerideki sıradağlara dikkatle bakan bir gözlemciye benzetiyordu. Hardy'nin amacı ise mümkün olduğu kadar çok sayıda zirveyi hiçbir kuşkuya yer bırakmayacak şekilde ayırd etmek. 'Eğer onu bir başkasının da görmesini istiyorsam', diyor Hardy, 'onu direkt olarak işaret ederim veya beni ona götüren zirveler zincirini, gösteririm. Bir diğerinin gözü de onu gördüğü zaman, araştırma, tartışma veya ispat tamamlanmış olur.' Bu benzetme bize bir ispatın esas amacının ikna etmek olduğunu gösteriyor.

Bir matematiksel ispat mantıksal tümdengelim ile yeni bir doğruluğun bilinen doğruluklardan eldesidir. Bu bilinen doğruluklar açık olanlar veya daha önce ispatladığımız doğru önermeler olabilirler. Yazılı birçok ispat, bir iki satırdan sayfalarca olanlara kadar değişebilirler. Bazıları çok daha uzundur. Örneğin, tüm tek dereceli grupların çözülebilir olduğunu gösteren Walter Feit ve John Thompson'un basılı ispatlı 251 sayfayı doldurmaktadır. Hatta ünlü Ramanujan öngörüsünün ispatı 2000 sayfayı aşmaktadır.

Genellikle, bir ispatın sunuluşu, yeterince sabırlı ve bilgili bir matematikçinin onu doğrulayabileceği şekilde olmalıdır.

Matematikteki bu gereklilik, deneysel bilimlerdeki tekrarlanabilirliğe eşdeğerlidir. Tabii ki, bir ispat kontrol edildiği halde bile yanlış olabilir. Bu, bir avukat ve Londra Matematik Derneği üyesi olan Alfred Kempe'nin dört-renk problemi ile ilgili ispatı için de söylenebilir. Yayınlanışından 11 yıl sonra, 1890'da, matematikçiler Kempe'nin argümanında bir hata buldular. Ve böylece, daha önce 1879'da çözülmüş olduğu sanılan dört-renk problemi yeniden gündeme geldi.

1920 yılında Alman matematikçisi David Hilbert ve onun çalışma grubu, matematiksel ispatın, formal teorisini geliştirdi. Bu sistemde, önce matematiksel önermeler formal dildeki ifadeler halinde yazılır. Bu ifadeler -en azından görünürde- anlamsızdırlar, dolayısıyla doğruluklarından veya yanlışlıklarından da ösz edilemez. Bazı belirli çıkarım kurallarıyla belli ifadelerin oluşturulması için, gerek ve yeter şartların diğerlerince sağladığı ispatlanabilir. Bu tip ispatlar salt biçimsel bir şekilde, sadece ifadelerin biçimleri referans alınarak oluşturulan mantık silsileleri halindedirler. Hatta, bell ibir ispat baz alınarak, prensipte, mekanik olarak onu doğrulamak bile söz konusudur: örneğin bir makineyi bu işi yapmak üzere programlayabiliriz.

Hilbert'in amacı kurduğu matematikğin iç çelişkilerden uzak olduğunu göstermekti. Başaramadı. Gerçekte, birkaç yıl sonra Avusturya'lı mantıkçı Kurt Gödel matematiğin tutarlılığını ispatlamaya çalışan her denemenin başarısızlığa mahkum olduğunu ispatladı. Ancak formal yaklaşım matematiğin temel özelliklerini, asıllarını bulmaya yöneliktir; ve bugün yapılan birçok ispat formal bir sistem içindeki formal çıkarım metodlarının uygulamalarının bir özeti halindedirler.

Herkes geçerli bir matematiksel ispatın ne olduğu konusunda fikir birliği içinde değildir. "Sezgiciler (Intuitionistic) okulu" diye bilinen

matematikçiler, sıradan matematikçinin doğru diye kabul ettiği mantıksal ilkeleri uzun uzun sorgulamışlardır. Bunlardan biri: P verilen herhangi bir önerme olmak üzere; ya P doğrudur ya da onun tersi olan $\sim P$ doğrudur. Bu matematikçilerin yaklaşımı, bugün kullanılmakta olan bir çok ispat yöntemini reddetmek yönündedir.

İspatlar konusunda, 1977 yılında Sovyet matematikçi Yuri Manin şöyle yazmıştır. "Bir ispat ancak kamuoyun tarafından bir ispat olarak kabul edilebilir bulunulduktan sonra ispat sayılabilir. Ve bu matematikte olduğu gibi fizik, dilbilim veya biyoloji için de geçerlidir."

Bilgisayarların yeri nedir? Bilgisayarlar matematikçilere pek çok şekilde yardımcı olmaktadır: hesaplama, çözme, simülasyon, ve grafik çizimleri gibi. Matematiksel gerçeklerin ispatlanmasında da yardımcı olmaktadır. Biz bilgisayar destekli ispattan, verilen herhangi bir matematiksel önermenin ispatında bilgisayar kullanılarak elde edilen verilere dayanan ve geleneksel ispatlarda olduğu gibi 'elle' kontrol etme imkanımızın olmadığı ispatları anlıyoruz.

Örnek olarak, Pensilvania Üniversitesinden, Herbert Wilf ve Doron Zeilberger'in yazmış oldukları, bazı kombinatorik özdeşlikleri ispatlayan bir programı verebiliriz. (Bkz. "The Automatic Proofing Machine", *New Scientist*, 21 Ekim 1989) Fakat bu ispatlar bizim anladığımız anlamda bilgisayar destekli ispatlar değil. Çünkü bilgisayar çıktısı sıradan kalem-kağıt ispatları şekline çevrilebilir. Kısaca, sadece bilgisayara inanmak zorunda kaldığımız durumlardaki ispatlara bilgisayar destekli ispat diyorumuz.

(New Scientist, 1991)