SEÇİM VE MATEMATİK - 3
SEÇİM PARADOKSU

HALİL İBRAHİM KARAKAŞ

S, en az üç elemanlı bir seçenekler kümesi. $I_1=\{1, \ldots, n\}$ seçmenler kümesi; S içindeki tüm zayıf sıralama bağıntılarından oluşan küme Z olsun. Diğer tüm gösterimlerimiz önceki yazılarımızdaki gibi olmak üzere,

$$f : Z' \rightarrow Z$$

birinci, ikinci ve üçüncü özellikleri sağlayan bir toplumsal karar fonksiyonu olsun.

Yardımcı Teorem: $\kappa \in Z$; $a,b,c \in S$ olsun. Eğer $a>b$ ise $a>c$ ya da $c>b$ dir.

Kanıt. $a \leq c$ ve $c \leq b$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde dört durum söz konusudur:

1) $c>a$, $b>c$; 2) $c>a$, $c \sim b$;
3) $a \sim c$, $b>c$; 4) $a \sim c$, $c \sim b$

Birinci durumda, geçişme özelliği $b>a$ çelişkisini verir. İkinci durumda, $c>b$; üçüncü durumda, $a>c$ ve dördüncü durumda

$a \sim b$ çelişkileri elde edilir. O halde, ya $a>c$ ya da $c>b$ dir.

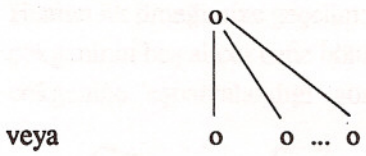
Teorem 4 Öyle bir $\delta \in I$ vardır ki $J=\{\delta\}$, her $a,b \in S$, $a \neq b$ için (a,b) nin bir karar kümesidir.

Kanıt. $a,b \in S$, $a \neq b$ olsun. Teorem 2 'ye göre, I_1 içinde (a,b) nin bir karar kümesi J vardır. J nin boş olmadığını biliyoruz. (a,b) nin karar kümeleri arasında eleman sayısı en az olan birini seçelim ve bunu D ile gösterelim. D boş olmadığından, $\delta \in D$ vardır. $\kappa_\delta \in Z$ yi $a>b$ ve $b>c$ olacak biçimde; her $i \in D \setminus \{\delta\}$ için $\kappa_i \in Z$ yi $c>a$ ve $a>b$ olacak biçimde seçelim. Ayrıca, $J \notin D$ için ki yi $b>c$ ve $c>a$ olacak biçimde seçelim. D, (a,b) nin karar kümesi olduğundan ve her $i \in D$ için $a>b$ olduğundan $a > b$ dir. Diğer yandan, $f(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n)$ olduğundan, yukarıdaki Yardımcı Teorem göre ya $a>c$ ya da $c>b$ olmalıdır. Eğer $c>b$ ise, her $i \in D \setminus \{\delta\}$ için $c>b$ ve her $j \in (I_1 \setminus D) \cup \{\delta\}$ için $b>c$ olduğundan, Teorem 1' e göre $D \setminus \{\delta\}$, (c,b) nin karar kümesidir. Teorem 3 'e göre de, $D \setminus \{\delta\}$, (a,b) nin karar kümesidir. Bu, D üzerindeki varsayımımızla çeliştiğinden $D=\{\delta\}$ olmalıdır.

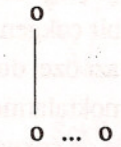
Sonuç (Arrow) En az üç farklı elemanı olan bir seçenekler kümesi içinde,arzu edilen dört özelliğin hepsine birden sahip olan bir toplumsal karar foksiyonu yoktur.

Yukarıdaki olumsuz sonuç, toplumsal karar fonksiyonları hakkında kötümser bir tablo çiziyor gibi görünmekle beraber, durum böyle değildir. Bu olumsuz sonucun ortaya çıkmasının nedeni, istenilen dört özeliğin sağlanmasından çok, seçmenlerin kullanımına izin verilen kısmi sıralama bağıntıları kümesinin Z kadar geniş ve toplumsal karar fonksiyonu f nin değer bölgesinin ise Z kadar dar olmasıdır.

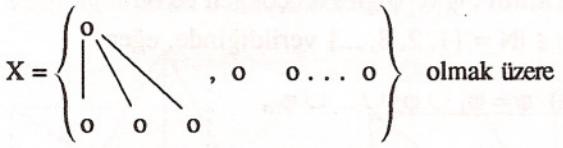
Yüzyıllardır kullanılan ve istenilen dört özeliğin dördünü de sağlayan toplumsal karar fonksiyonları vardır. Bir tek görüş veya aday için yapılan oylama yöntemi,demokrasilerde çok sık uygulanan yöntemdir. Bu yöntemde,eşitlik durumu kura veya başka bir yöntemle bozulmak üzere en çok oyu alan görüş veya aday kazanır ve bu yöntemde adayın kullanımına açık olan kısmi sıralama bağıntıları



biçiminde çizgelere sahip olan bağıntılardır. Son toplumsal kararı gösteren kısmi sıralama bağıntısı ise

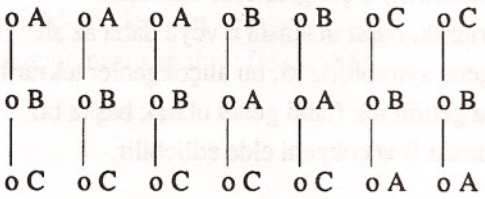


biçiminde bir çizgeye sahiptir. Böylece , bu yöntemde



$$f : X \times X \times \ldots \times X \rightarrow X$$

toplumsal karar fonksiyonunun arzu edilen dört özelliğe sahip olduğu kolayca görülebilir. Bu toplumsal karar fonksiyonunun iyi tarafı, beraberlikler kura veya başka bir yolla bozulmak kaydıyla, daima bir büyükçe eleman (yani kazanan eleman) vermesidir. Bununla beraber, bu yöntemin de iyi olmayan yanları vardır. Başka bir deyimle, istenilen bazı özelliklere sahip değildir. Bu yöntem,seçmenlerin tercihlerini ayrıntılı olarak belirlemelerine imkan vermez. Bu yöntemle ulaşılan toplumsal karar, bireylerin isteklerini tam olarak yansıtmayabilir. Örneğin, yedi seçmenli ve üç adaylı bir seçim olayında adaylar, A,B,C olsun. Seçmenlerin gerçek tercihlerinin, sırasıyla,aşağıdaki çizgelerde verilen tümden sıralama bağıntıları olduğunu kabul edelim:



Yukarıdaki yönteme göre,bu seçimi A adayı kazanır. Ancak seçmenlerin çoğunluğunun (4/7 si) B yi A ya tercih ettikleri açıktır. Bununla beraber, Teorem 4 te görüldüğü üzere, zayıf sıralama bağıntıları üzerinde arzu edilen dört özelliği sağlayan bir toplumsal karar fonksiyonu yoktur.

Bu yazı dizisi hazırlanırken, Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümünün çok kısıtlı imkanlara sahip olan kütüphanesinden yararlanıldı. Aşağıda adları verilen kaynaklardan bir kısmı bu kütüphanede bulunmakla beraber bir kısmına ulaşılamamıştır.

Toplumbilimcilerimizin bu konuya ilgi göstereceklerine ve Matematik Dünyası sayfalarında bu konuyu değişik boyutları ile inceleyip katkıda bulunacaklarına inanıyorum.

KAYNAKLAR

1. Arrow, K. Social Choice and Individual Values, 2nd ed., New Haven, Conn.,Yale University Press,1963.

2. Cozzens, B.M. and Porter D.R. Mathematics and Its Applications, Massachusetts, D.C. Heath and Company,1987.

3. Fisher, J.L. Aplication Oriented Algebra, New York, IEP Series in mathematics, 1977.

4. Luce R.D. and Raifta, H.Games and Decisions, New York, John Wiley and Sons, 1957.

5. Malkewitch, J. The Mathematical Theory of Elections, Lexington, Mass., HIMAP Module 1,COMAP-1985.