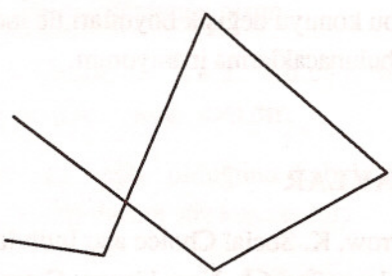
EŞPARÇALAMA

CEM TEZER

Bu yazıda "çokgen" kelimesiyle, kendi kendini kesmeyen, kapalı (yani başladığı noktada biten) bir kırık çizgi tarafından sınırlandırılmış bir düzlem bölge kastedeceğiz. Bu kavramlara şekillerle açıklık kazandıralım: Şekil 1a, 1b, 1c de sırayla kendini kesen, kendini kesmeyen, kendini kesmeyen ve kapalı birer kırık çizgi görülüyor.



Şekil 1a

Şekil 1b

Şekil 1c

Tabii Şekil 1c deki kırık çizgi istediğimiz özelliklere sahip olup bir çokgen sınırlandırmaktadır. Bazı özel durumlarda, birbirini en fazla sınır noktalarında kesen çokgenlerin birleşimine de çokgen diyeceğiz.

Şimdi yazımızın konusunu teşkil eden eşparçalama kavramına geçebiliriz:

Tanım : φ ve ψ gibi iki çokgen ve bir $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ verildiğinde, eğer

a) $\varphi = \varphi_1 \cup \varphi_2 \cup ... \cup \varphi_{n'}$,

$\psi = \psi_1 \cup \psi_2 \cup ... \cup \psi_{n'}$,

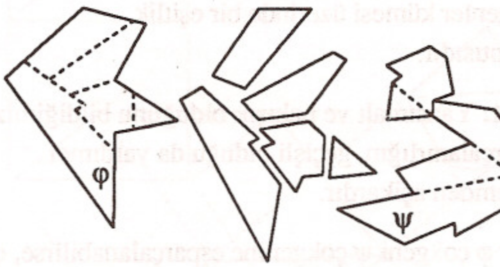
$n' \leq n$ olacak,

b) Her $i \in \{1, 2, ..., n'\}$ için, ψ_i, φ_i ye izometrik olacak ([2]),

c) Her $i, j \in \{1,2,...,n'\}$, $i \neq j$ için φ_i, φ_j yi ve ψ_i, ψ_j yi ancak sınır çizgisine ait bir noktada kesecek şekilde bir $n' \in \mathbb{N}$ ve $\varphi_1, \varphi_2 ...,\varphi_{n'}, \psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n'}$ çokgenleri varsa, "φ çokgeni ψ çokgenine n-eşparçalanabilir" diyeceğiz.

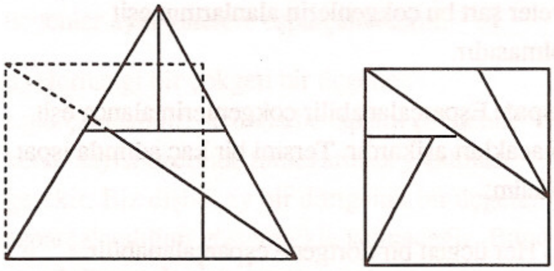
Matematiğin bir cilvesi olarak, aslında basit bir fikri böyle çetrefil bir şekilde sunmak zorunda kaldık. Örneklere geçmeden önce eşparçalanmayı daha gündelik bir dille bir daha tarif edilim: Aslında "φ çokgeni ψ çokgenine n- eşparçalanabilir" dediğimizde şunu kastediyoruz: Kağıttan (veya başka bir iki boyutlu malzemeden) φ çokgenin bir nüshasını hazırlasak, bunu makasla n veya daha az alt çokgene ayırabiliriz ki, bu altçokgenler tekrar bir araya getirilerek (tabii genel olarak başka bir konumda !) ψ çokgeni elde edilebilir.

Hemen ilk örneğimize geçelim: Şekil 2 de bir φ çokgeninin beş altçokgene bölünerek nasıl ψ çokgenine "eşparçalandığı" görülüyor.



Şekil 2

Bir eşkenar üçgen beş altçokgene bölünerek bir kareye (tabii alanca eşit bir kareye) eşparçalanabilir. Okuyucu bunun nasıl yapıldığını Şekil 3 ten çıkarabilir. ([3])

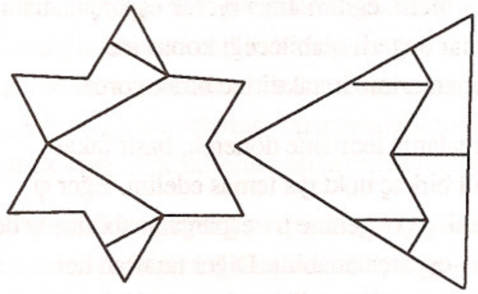


Şekil 3

Belki izaha muhtaç olan tek husus, sözkonusu üçgendeki yatay çizginin kenar orta noktalarını birleştirmekte olduğudur.

Bu açıklamalardan sonra okuyucu herhalde yeni bir maceranın heyecanını duymaya başlamıştır. Onu daha da tahrik etmek için şu soruyu soralım: Acaba bir eşkenar üçgen beşten daha az sayıda altçokgen kullanılarak bir kareye eşparçalanabilir mi? Bu soruya yazımızın sonunda tekrar döneceğiz.

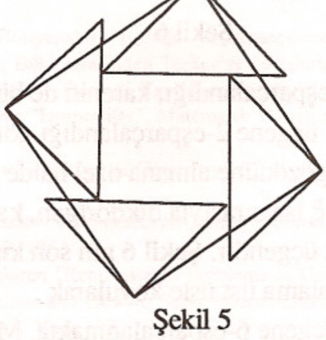
Büyük eşparçalama ustası H. Lindgren'den bir de mühr-i-Süleyman - eşkenar üçgen eşparçalaması sunalım: ([5], s. 85)



Şekil 4

Yazımızın merkezini teşkil edecek olan esas teoreme geçmeden önce eşparçalama konusunun matematikteki yerini biraz belirleyelim. İşin eğlencelik tarafı hakkında uzun uzadıya konuşmaya gerek yok. Bu noktada okuyucuya H. Lindgren'in harikulade kitabını ([5]) ve M. Gardner'ın zarif makalesini ([4]), önemle tavsiye edelim. Ayrıca V.G. Boltyanskii'nin derli toplu kitabı [1] dilimize kazandırılmış olup kıymetli bir kaynaktır. Bundan başka, eşparçalama ve benzeri kavramlar geometrinin ve genel olarak matematiğin temelleri hakkında bir çok çalışmaya konu olmuş. Bu yönde çalışma yapmış matematikçilerden M. Dehn, F. Hausdorff, S. Banach ve A. Tarski akla ilk gelenlerden.

Tarihte eşparçalamanın en eski örneği M.S. 10. yüzyılda yaşamış bir matematikçi olan Ebülvefa'ya ait: Ne yazık ki günümüze kadar ulaşamamış bir kitabından kalan parçalarda, Ebülvefa'nın bir kareyi dokuz altçokgene ayırıp sonra bu çokgenleri birleştirerek üç çeşit kareye dönüştürüldüğü görülüyor. ([3]) Bu zarif ve az önce söylendiği gibi, bilinen en eski eşparçalamanın anafikri Şekil 5 ten anlaşılabilir.



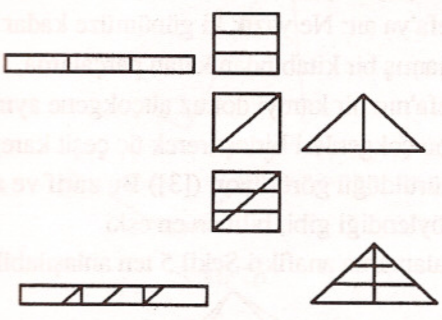
Şekil 5

Bir geometri eğitim aracı olarak eşparçalamanın ne kadar değerli olabileceği konusunu öğretmenlerimizin takdirine bırakıyoruz.

Eşparçalama teorisine dönerek, basit fakat önemli birkaç noktaya temas edelim. Eğer φ çokgeni ψ çokgenine n - eşparçalanabilirse ψ de φ ye n–eşparçalanabilir. Diğer taraftan her çokgenin kendi kendisine 1-eşparçalanabileceği de aşikardır. Şimdi, bir φ çokgeni bir nε IN için bir ψ çokgenine n-eşparçalanabiliyorsa "φ çokgeni ψ çokgenine eşparçalanabilir" diyelim. (Kaç parçada eşparçalandığı mühim değil!). Az evvel söylenenlerin ışığında, eşparçalanabilirliğin düzlemdeki çokgenler kümesi üzerinde yansımalı ve bakışık bir bağıntı olduğu görülüyor. Böylece önemli ve teknik bir önermeye sıra geliyor:

Yardımcı Teorem : Eğer φ çokgeni ψ çokgenine m-eşparçalanabilir, ψ çokgeni ξ çokgenine n-eşparçalanabilirse, φ çokgeni de ξ çokgenine mn-eşparçalanabilir.

Bu yardımcı teoremin ispatı, yazının girişindeki tarif nevinden aslında çok basit bir fikri teknik bir kıyafete sokmaktan ibaret. Anafikri bir örnekle Şekil 6 yardımıyla açıklamakla yetineceğiz: Şekil 6 da ince uzun bir dikdörtgenin



Şekil 6

bir kareye 3-eşparçalandığı, karenin de bir ikizkenar dik üçgene 2-eşparçalandığı görülüyor. Yani burada gözönüne alınana özel halde m=3, n=2, φ, ψ ve ξ ise sırasıyla dikdörtgen, kare ve ikizkenar dik üçgendir. Şekil 6 nın son kısmında bu iki eşparçalama üst üste koyularak dikdörtgen, üçgene 6-eşparçalanmakta. Meraklı okuyucu bu örnekten yola çıkarak tam bir ispat yazabilir.

Teorem 1: Eşparçalanabilirlik düzlem çokgenler kümesi üzerinde bir eşitlik bağıntısıdır.

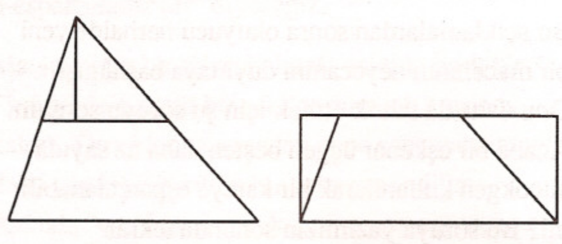
İspat: Yansımalı ve bakışık olduğunu bildiğimiz eşparçalanırlığın, geçişli olduğu da yardımcı teoremden aşikardır.

Eğer φ çokgeni ψ çokgenine eşparçalanabilirse, φ ve ψ nin alanları eşit olmalıdır. Çokgen eşparçalanabilirlik konusunun temel sonucu olan Gerwin-Bolyai teoremi bu gerek şartın aynı zamanda da yeter olduğunu işaret etmektedir.

Teorem 2: (Gerwin - Bolyai Teoremi): İki çokgenin eşparçalanabilir olmaları için gerek ve yeter şart bu çokgenlerin alanlarının eşit olmasıdır.

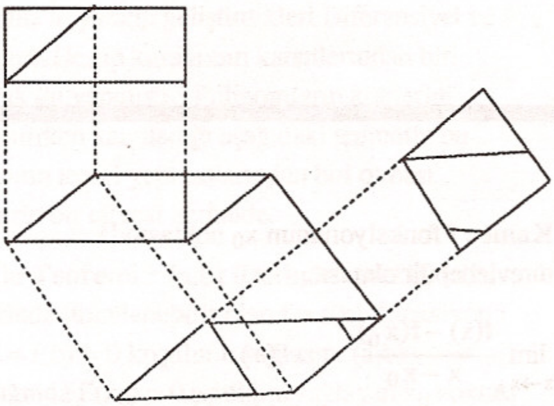
İspat: Eşparçalanabilir çokgenlerin alanca eşit olacakları aşikardır. Tersini bir kaç adımda ispat edelim:

a) Her üçgen bir dörtgene eşparçalanabilir: Üçgenin iki kenarının orta noktaları birleştirilerek elde edilen doğru parçası ve bu doğru parçasına üçüncü köşeden indirilen dikme üçgeni üç altüçgene ayırır. Bu üçgenler hareket ettirilerek kolayca bir dikdörtgen elde edilir. (Şekil 7)



Şekil 7

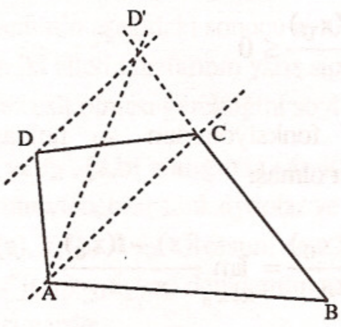
b) Her dikdörtgen bir kareye eşparçalanabilir: Bu eşparçalanabilirliği Şekil 8 de özetlemeyi yeterli görüyoruz. Sözkonusu dikdörtgen ne kadar uzun olursa o kadar çok parçaya gerek duyulacağını hatırlatalım.



Şekil 8

c) Alanca eşit iki üçgen eşparçalanabilir: Bu artık a) ve b) den dolayı aşikardır; alanları aynı olan üçgenler aynı karelere eşparçalanabilir.

d) Herhangi bir çokgen bir üçgene eşparçalanabilir: Aslında bu ispatın çokgenin kenar sayısı üzerinde tümevarımla yapılması gerekir. Biz dışbükey bir dörtgenin bir üçgene eşparçalandığını göstermekle yetineceğiz. Bunu genel dörtgenler için yapmayı okuyucuya bırakıyoruz. Bu basit fikri okuyucu beşgenleri dörtgenlere, altıgenleri beşgenlere v.b. eşparçalamakta kullanabilir. ABCD dışbükey bir dörtgen olsun. (Şekil 9)

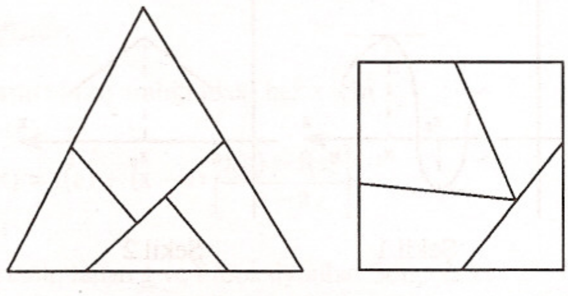


Şekil 9

D den AC ye çizilen paralel BC yi D'de kessin. ADC ve AD'C üçgenleri alanca eşit olup eşparçalanabilirler. Demek ki ABCD dörtgeni de AD'C üçgenine eşparçalanır.

e) Alanca eşit φ ve ψ çokgenlerini ele alalım. φ ve ψ sırasıyla alanca kendilerine eşit $\hat{\varphi}$ ve $\hat{\psi}$ üçgenlerine eşparçalanabilerler. $\hat{\varphi}$, $\hat{\psi}$ alanca eşit üçgenler olup birbirlerine eşparçalanabilirler Demek ki φ, ψ birbirlerine eşparçalanabilirler.

Gerwin-Bolyai teoremi gerçekten de alanları eşit iki verilmiş çokgeni eşparçalamakta doğrudan kullanılabilir. Fakat genel olarak, bu teoremi takip ederek elde edilen eşparçalamalarda çok sayıda, bu yüzden de çok ufak altçokgenler ortaya çıkar. Bu bizi "Alanca eşit iki çokgen en az kaç alt çokgen kullanılarak eşparçalanabilir?" sorusuna götürüyor. Bu, hakkında mütehassısların "sokaktaki adam" dan daha fazla birşey bilmediği çok zor bir konudur. Durumu en iyi kare-eşkenar üçgen problemi ile örnekleyebiliriz: Yazımızın başında bu çokgenlerin beş altçokgen kullanılarak eşparçalanabildiğine dikkat çekmiştik. Aynı işin dört altçokgenle yapılabileceği 1902 de H.E. Dudeney tarafından gösterilmiştir. ([5]). Şekil 10 da Dudeney'in harikulade eşparçalanmasını sunarak yazımız bitirelim.



Şekil 10

KAYNAKLAR:

1) V. G. Boltyanskii: "Eşdeğer ve Eşparçalanabilir Şekiller", Altıntaş Büke tarafından Türkçe'ye çevrilmiş. Türk Matematik Derneği Yayınları, İstanbul 1964.
2) H. Demir "İzometriler", Matematik Dünyası, Cilt 1, Sayı 2. 1991
3) H. Eves "A Survey of Geometry" Allyn and Bacon, Boston 1968
4) M. Gardner "Mathematical Games" Scientific American, 205 158-169 1961.
5) H. Lindgren "Recreational. Problems in Geometric Dissections and How to Solve Them" Dover Publications, Inc., New York 1972.