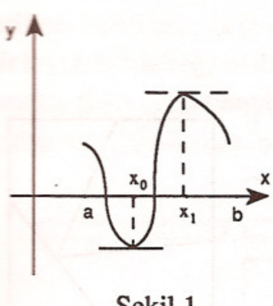
ROLLE ve ORTALAMA DEĞER TEOREMİ

ŞAFAK ALPAY

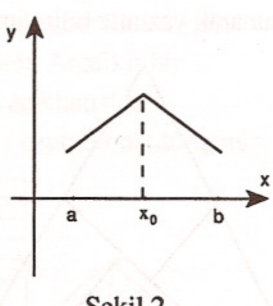
Matematikte varlık teoremleri olarak sınıflandırılan teoremler vardır. [a,b] kapalı aralığında tanımlı, gerçel değerli ve sürekli f=f(x) fonksiyonu bu aralık üzerinde aldığı en büyük değere (maksimum) bu aralığın bir noktasında ulaşır.

Benzer şekilde yukarıda anılan özelliklere sahip f=f(x) fonksiyonu [a,b] aralığında aldığı en küçük değere (minimum) [a,b] aralığının bir noktasında ulaşır.

Sürekli bir fonksiyon için özellikleri olan noktaların varlığını söyleyen bu önermeler varlık teoremleridir.



Şekil 1



Şekil 2

Şekil 1'de grafiği görülen f = f(x) fonksiyonunun minimum değerini aldığı x_0, maksimum değerini aldığı x_1 noktalarında eğriye çizilen teğet eğimlerinin 0, başka bir deyişle teğetlerin x-eksenine paralel olduklarını görüyoruz.

Önerme: $x_0 \in [a,b]$, sürekli $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun maksimum (veya minimum) değerini aldığı bir nokta olsun. f, x_0 noktasında türevlenebilir ise, x_0 f′ (türev) fonksiyonunun bir köküdür, yani $f'(x_0) = 0$ dır.

Kanıt : f fonksiyonunun x_0 noktasında türevlenebilir olması

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (+)$$

limitinin olması demektir. x_0 noktasına sağdan yani x_0 dan büyük değerler boyunca veya x_0 dan küçük değerler boyunca yani soldan yaklaşılabilir. (+) daki limitin var olması sağ ve sol limitlerin eşitliği ile tanımlanır.

Genellikten kaybetmeden x_0 noktasında maksimumun alındığını kabul edebiliriz. x_0 noktasına soldan yaklaşırken $x - x_0 \leq 0$ ve $f(x) \leq f(x_0)$ olacağından

$$\lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \text{olacaktır. (Niçin?)}$$

x_0 noktasına, x_0 dan büyük değerler boyunca yaklaşırken alınan limit

$$\lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

olacaktır. f fonksiyonunun x_0 noktasında türevlenebilir olması

$$\lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

olduğundan, $f'(x_0) \leq 0$ ve $f'(x_0) \geq 0$, yani $f'(x_0)=0$ olmalıdır.

1652-1719 yılları arasında yaşıyan Fransız matematikçi Michel Rolle çağdaşları Newton ve Leibniz'in yaratıp geliştirdikleri Diferansiyel ve Integral Hesap kuramının karşıtlarından biri olarak ün yapmıştır. Polinomların köklerini araştırırken kanıtladığı aşağıdaki teoremin bu kuramın temel yapı taşlarından biri olması kaderin bir cilvesi herhalde.

Rolle Teoremi : [a,b] üzerinde sürekli, (a,b) üzerinde türevlenebilir olan $f = f(x)$ fonksiyonu $f(a) = f(b) = 0$ koşulunu sağlasın. (a,b) aralığında $f'(x_0) = 0$ eşitliğini sağlayan x_0 noktası vardır.

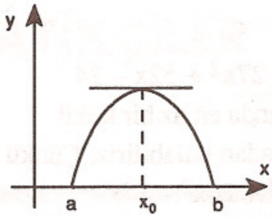
Kanıt: f sabit 0 fonksiyonu ise teorem açıktır. Aksi halde f(x) fonksiyonunun maksimum değerini aldığı noktayı x_1, minimum değerini aldığı noktayı x_2 ile gösterelim. $f(a) = f(b) = 0$ olduğundan x_1 veya x_2 den biri (a,b) içinde olmalıdır.

Teoremlerin hipotezleri olan varsayımları düşünmemizde yarar vardır. Örneğin, Şekil 2'de grafiği verilen fonksiyonun neden Rolle Teoremine bir çelişki olmadığını ve [–1,1] aralığında $f(x) = |x| - 1$ olarak tanımlanan fonksiyonu düşünerek teoremdeki türevlenebilirlik varsayımdan vazgeçilemiyeceğini görmeliyiz.

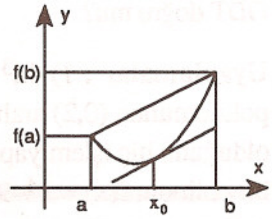
Rolle Teoreminin aşağıdaki sonucu aynı anda ipi göğüsleyen iki atletin hızlarının yarış süresince en az bir kez eşit olması gerektiğini söylüyor!

Sonuç: f_1 ve f_2 , [a,b] aralığında sürekli, (a,b) aralığında türevlenebilir fonksiyonlar ve $f_1(a) = f_2(a)$, $f_1(b) = f_2(b)$ olsun. (a,b) aralığında $f'_1(x_0) = f'_2(x_0)$ denklemini sağlayan bir x_0 sayısı vardır.

Kanıt: Sürekli ve türevlenebilir fonksiyonların farkları da aynı özellikleri taşır! (a,b) aralığındaki her x için $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ ile tanımlanan fonksiyon Rolle Teoreminin koşullarını sağlar ve istenileni verir.



Şekil 3



Şekil 4

Rolle Teoremi $x_0 \in (a,b)$ için eğriye $(x_0, f(x_0))$ noktasında çizilen teğetin x–eksenine paralel olduğunu söylüyordu. (Şekil 3). Fransız matematikçisi Joseph Louis Lagrange (1736-1813) tarafından kanıtlanan Ortalama Değer Teoremi benzer koşullarda bir $x_0 \in (a,b)$ için $(x_0, f(x_0))$ noktasında çizilen teğetin (Şekil 4), (a, f(a)) ve (b, f(b)) noktalarını birleştiren doğruya paralel olacağını söylüyor.

Ortalama Değer Teoremi (ODT): $f = f(x)$ fonksiyonu [a,b] aralığında sürekli, (a,b) aralığında türevlenebilir olsun. (a,b) deki bir x_0 sayısı için

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

sağlanır.

Kanıt: [a,b] aralığındaki her x için

$$g(x) = f(a) + (x - a)\left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right]$$

ile tanımlanan g ve f fonksiyonları Sonuçta ki hipotezleri sağlar. Dolayısı ile (a,b) içindeki bir x_0 için

$$f'(x_0) = g'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

elde edilir.

$f(x) = |x|$ fonksiyonunun [–1,1] aralığında, $h(x) = \tan x$ fonksiyonunun $[0,\pi]$ aralığında, $g(x) = x - [\![x]\!]$ fonksiyonunun [0,1] aralığında ODT nin hipotezlerini sağlamadığını görmeliyiz. Verilen fonksiyonlar için belirtilen aralıklarda

ODT doğru mu?

Uygulamalar : 1) $4x^3 - 27x^2 + 52x - 24$ polinomunun (0,2) aralığında en az bir kökü olduğunu hiç işlem yapmadan bulabiliriz. Çünkü bu polinom $f(x) = x^4 - 9x^3 + 26x^2 - 24x$ polinomunun türevidir ve $f(0) = f(2) = 0$ vardır. Polinomlar türevlenebilir olduklarından istenilen Rolle Teoreminden elde edilir.

2) $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunu [100,101] aralığında düşünerek $\sqrt{101}$ sayısını yaklaşık olarak bulabiliriz. ODT den $100 < m < 101$ olan bir m sayısı için

$$\frac{\sqrt{101} - \sqrt{100}}{101 - 100} = \frac{1}{2\sqrt{m}} \quad \text{veya}$$

$$\sqrt{101} = 10 + \frac{1}{2\sqrt{m}}$$

elde ederiz. $10 < \sqrt{m} < \sqrt{101}$ bize

$$20 < 2\sqrt{m} < 2\sqrt{101} = \sqrt{404} = 21 \quad \text{ve}$$

$$\frac{1}{21} < \frac{1}{2\sqrt{m}} < \frac{1}{20} \quad \text{verir. Dolayısı ile}$$

$$\sqrt{101} \text{ in}, \; 10 + \frac{1}{21} \text{ ve } 10 + \frac{1}{20}$$

arasında bir sayı olduğunu söyliyebiliriz.

3) Eğer f in türevi f' fonksiyonunun [a,b] aralığında aldığı minimum değer m, maksimum değer M ise ODT den $(b-a)m < f(b) - f(a) < (b-a)M$ elde edilir. Bu eşitsizliği $f(x) = \sin x$ fonksiyonu için kullanarak her a,b için $|\sin b - \sin a| < |b - a|$ elde edebiliriz.

ODT giderek artan otoyollarımız üzerinde hız denetimi yapmak içinde kullanılabilir. $f = f(t)$ t birim zamanında alınan yolu göstersin $f = f(t)$ nin türevlenebilir olduğunu varsayarsak, $f'(t)$ bize t anındaki hızı verecektir.

4) Son model BMW i ile saat 12.01 de Ankara-Istanbul otoyoluna giren Bay HIZLI saat 12.46 da 120 km ötedeki Gerede çıkış turnikesine girer. Bilete bakan memur, Bay Hızlı'nın şaşkın bakışları arasında Trafik polisini çağırır. Polis, Hızlı'nın karşı çıkışlarına rağmen, ODT gereğince

$$\frac{f(3/4) - f(0)}{\frac{3}{4}} = \frac{120 - 0}{\frac{3}{4}} = 160 = f'(c)$$

denkleminden Hızlı'nın saat 12.01 ile 12.46 arasında 160 km/saat hız yaptığını söyliyerek gerekli cezayı keser.

Yazımızı yanıtlarını beklediğimiz sorular ile bitirelim.

1. f bir polinom olsun a ve b sayıları f in ikişer kez kökü olduğu sayılar ise, f' nün [a,b] aralığında en az üç kökü olduğunu gösterebilir misiniz?

2. f ve g [a,b] aralığında tanımlı, türevlenebilir fonksiyonlar olsunlar. [a,b] deki her x için $f'(x) = g'(x)$ ise, bir c sayısı için $g(x) = f(x) + c$ olduğunu gösterebilir misiniz?

3. $a < b$ koşulunu sağlayan a ve b sayıları arasında $m^2 = \frac{1}{3}(b^2 + ab + a^2)$ eşitliğini sağlayan m sayısının varlığını gösterebilir misiniz?

4. (0,1) aralığı içinde $\tan x = 1 - x$ denklemini sağlayan bir noktanın varlığını kanıtlayınız.

ABCTİK

BİR + BİR = İKİ   ABC tiğini çözünüz.