BAZI ÇOKGEN FORMÜLLERİNİN KOLAY KOMBİNATORİK KANITLARI

ULUĞ ÇAPAR

Konveks, n kenarlı bir çokgenin bütün köşegenlerinin çizildiğini düşünelim. Bu yazıda şu iki problemin yanıtı aranacaktır :

A) Çokgen içinde en fazla kaç kapalı alt bölge ortaya çıkar?

B) Çokgenin köşegenleri en fazla kaç doğru parçasına bölünürler?

Çokgen içinde herhangi bir noktadan en fazla iki köşegen geçtiği varsayımı yapılırsa bu sorular şöyle de sorulabilir : Bütün köşegenlerinin çizilmesi ile

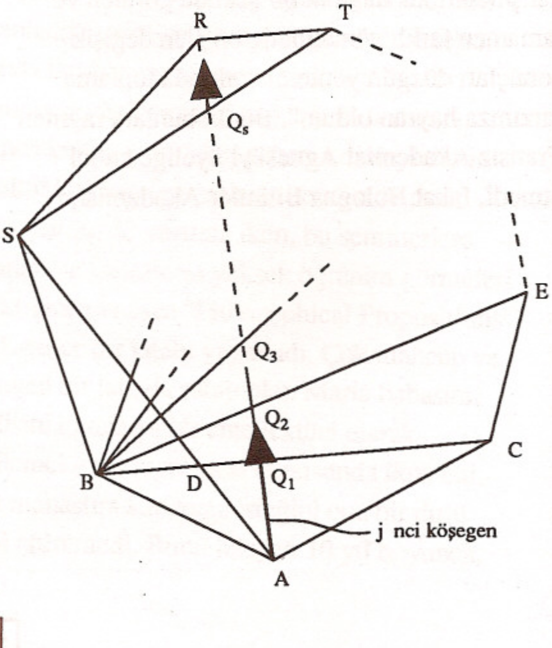
A') Çokgen içinde kaç kapalı alt bölge meydana gelir?

B') Köşegenler toplam olarak kaç doğru parçasına bölünürler.

Yukardaki soruların cevabı olan formüller önce çetrefil bir sayma işlemi sonucu n e göre indirgeme bağıntılarının bulunması, daha sonra da bu indirgeme bağıntıları üzerinde bir hayli cebrik işlem yapılması ile elde edilebilir. Bu bize n e göre 4 üncü dereceden polinomlar verir. Oysa aynı formüller kombinatorik olarak aşağıda açıklanan biçimde çok kolay olarak çıkarılabilmektedir.

A') nın yanıtı :

Köşegenleri herhangi bir biçimde numaralayalım. (Toplam köşegen sayısı $\binom{n}{2} - n$ dir, (Niçin ?)). Bu köşegenlerin teker teker çizildiğini varsayalım ve bu sırada ortaya çıkan alt bölgeleri izleyelim. Başlangıçta tek bir bölgemiz vardır. (Çokgen kenarları ile sınırlanan kapalı bölge). 1 no.lu köşegenin çizilip karşı köşeye ulaşması ile iki alt bölge yaratılmış olur, dolayısı ile bölge sayısı bir artar. Daha sonra köşegen çizim işlemine devam ederek j'inci köşegene kadar geldiğimizi düşünelim. (Şekle bakınız). j inci köşegenin çizimi sırasında daha önce çizilmiş bulunan köşegenlerle her kesişmemizde alt bölge sayısını bir artırmış oluruz. Örneğin j inci köşegenin daha önce çizilmiş bulunan BC köşegeni ile Q_1 noktasında kesişmesinden sonra ADC bölgesi, ADQ_1 ve AQ_1C olarak iki alt bölgeye bölünür, diğer bütün alt bölgeler ise aynı kalır. Dolayısı ile toplam alt bölge sayısı bir artar. j inci köşegenin daha önce çizilmiş olan köşegenlerle Q_2, Q_3, ... gibi diğer kesişme noktalarında da alt bölge sayısı birer artmağa devam eder. Sonuncu kesişme noktası, (diyelim ki Q_s)'ten başlayıp karşı köşeye ulaşım sırasında da alt bölge sayısı bir artar. (SRT bölgesi, SRQ_s ve Q_sRT olarak iki alt bölgeye bölünür).



Bütün köşegenler çizildikten sonra şu sonuca varılır :

i) Bu çizim sırasında bütün köşegen kesişme noktaları elde edilir, ayrıca varsayımımızın sonucu olarak da her bir köşegen kesişme noktası bir ve yanlız bir kere gözönüne alınır. (Köşegen kesişme noktaları sayısı $\binom{n}{4}$ tür. (Niçin ?)).

ii) Her bir köşegen kesişme noktası ortaya çıktıkça alt bölge sayısı bir artar. Her bir köşegenin karşı köşeye ulaşması ile de alt bölge sayısı yine bir artırılmış olur.

Karşı köşeye ulaşma işlemi köşegen sayısı kadar yinelenir.

Böylece başlangıçta tek bir bölge ile yola koyulduğumuzdan :

Alt Bölge Sayısı = 1 + Köşegen Kesişme Noktası Sayısı + Köşegen Sayısı

bağıntısı elde edilir. Diğer bir deyişle A') sorusunun yanıtı

$$1+\binom{n}{4}+\binom{n}{2}-n$$

dır.

B') Benzer bir akıl yürütme ile :

Köşegenler Üzerindeki Doğru Parçası Sayısı=

2 x Köşegen Kesişme Noktası Sayısı + Köşegen Sayısı,

bağıntısı veya B') sorusunun yanıtı olarak

$$2\binom{n}{4}+\binom{n}{2}-n$$

formülü bulunur.

Bu defa çizime sıfır doğru parçası ile başlanmakta, $Q_1, Q_2, \ldots Q_3$ gibi kesişme noktalarında ise doğru parçası sayısı iki artmaktadır. (Örneğin Q_1 kesişiminde DC doğru parçası yerine AQ_1, DQ_1 ve Q_1C gibi üç doğru parçası ortaya çıkmaktadır). Bunun gibi karşı köşeye ulaşım da yeni bir doğru parçası yaratmaktadır, (Q_3R gibi).

Okuyucu ikiden fazla köşegeni aynı noktadan geçmeyen konveks çokgenler çizerek aşağıdaki sayısal değerleri kontrol edebilir :

n	4	5	6	7	8	9
Alt Bölge	4	11	25	50	91	154
Doğru Parçası	4	15	39	84	160	279

Bu değerlerin bazıları kristallografi ve mineralojide kullanılmaktadır.

EĞLENCE

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 25 & 33 \\ 55 & 69 \end{bmatrix}$$

eşitliğini ilginç buluyorsanız, bu özelliği sağlayan matrisler bulmaya çalışınız.