OLİMPİYAT HABERLERİ

ALBERT ERKİP

2000 yılı Olimpiyatına talip olan İstanbul 1993 yazında bir başka olimpiyata ev sahipliği yapacak. 13-24 Temmuz tarihlerinde yaklaşık 75 ülkeden 450 öğrenci ile 200 matematikçi ve eğitimci 34. Uluslararası Matematik Olimpiyatı için İstanbul'da buluşacaklar.

34. Olimpiyatın organizasyonunu TÜBİTAK yürütüyor. ODTÜ ilgili bakanlıklar, başta İstanbul Büyükşehir olmak üzere belediyeler bu organizasyona destek verecekler. Türk Matematik Derneği özellikle bilimsel konularda yardımcı olacak. Kamu ve özel kesimden çok sayıda kuruluşun da Olimpiyatı desteklemesi bekleniyor.

Matematik Olimpiyatları yalnızca bir yarış olmakla kalmıyor, değişik ülkelerden öğrencilerin ve uzmanların bir araya geldiği, başta eğitim olmak üzere pek çok konunun tartışıldığı bir platform oluşturuyor. Öte yandan sosyal ve kültürel etkinlikleriyle program bir şölen niteliğinde. Öğrencilerimizin, öğretmenlerimizin, eğitimcilerimizin, matematikçilerimizin ve tüm kamuoyunun böyle bir olayı yakından izlemeleri ilginç olacak.

34. Olimpiyat için bir yandan ev sahipliği hazırlıkları sürerken, bir yandan da takım hazırlık çalışmalarımız devam ediyor. Aralık ayında bir ara seçme sınavı yapıldı. Bu sınavın sorularını aşağıda vereceğiz. Sınav sonucu belirlenen bir grup öğrenci Şubat ayında iki haftalık bir hazırlık kampı yapacaklar. Takım bu grup içinden son seçme sınavı ile belirlenecek.

1993 yılında bir diğer gelişme de Türkiye Olimpiyatları. Bundan böyle TÜBİTAK matematik, fizik, kimya, biyoloji ve informatik (bilgisayar) dallarında her yıl Türkiye Olimpiyatları düzenleyecek. İki aşamalı olacak bu yarışmaların ilk aşamasına tüm liseler birer takımla katılacak. Bu aşama sonunda hem bölgesel dereceler verilecek hem de ikinci aşamaya katılmaya hak kazananlar belirlenecek. İkinci aşama tam bir Olimpiyat niteliği taşıyor. 1993'te ilk aşama Mayıs, ikincisi ise Aralık ayında yapılacak.

Olimpiyatlar gerek TÜBİTAK gerekse de yarışmaya katılan öğrenciler ve onlara yardımcı olanlar açısından zahmetli, masraflı olaylar. Bu etkinliklerin amacı yalnızca ülkenin en iyilerini belirleyip uluslararası yarışmalarda en iyi şekilde temsil edilmemizi sağlamak diye görülmemeli. Bu süreç içinde çok sayıda okul ve öğrencinin katılımı gerçekleşiyor. Günümüzde lise eğitiminin tek amacı ve tek ölçütü üniversite giriş sınavlarında başarı olarak görülüyor. Bu görüş hem eğitimi anlamsızlaştırmakta hem de öğrenciyi, öğretmeni yanlış yönlendirmekte. Olimpiyat yarışmaları ve benzer etkinlikler farklı bir ilgi alanı sunarak okul-müfredat-dershane tekdüzeliğini değiştirebiliyor. Öğrencilerin değişik alanlara merak duymalarını, yeteneklerini keşfetmelerini ve geliştirmelerini, okulların da programlarını gözden geçirerek öğrencilerine bu tür olanaklar yaratmalarını sağlıyor. Bu ise öğrencilerin iyi yetişmelerinde çok önemli bir etken.

34. ULUSLARARASI MATEMATİK OLİMPİYADI HAZIRLIK EKİBİ SEÇME SINAVI

(19 Aralık 1992, 09.00)

1. Beş çiftin katıldığı bir partide, katılanların bir bölümü birbirleriyle el sıkışırlar. Hiç kimse doğal olarak ne kendi kendisiyle ne de eşiyle el sıkışır. Partiye katılanlardan biri, kendi dışındaki (eşi de dahil olmak üzere) dokuz kişiye kaç kişiyle el sıkışmış olduklarını sorar. Aldığı yanıtlara bakınca, bu dokuz kişi içinde eşit sayıda kişiyle el sıkışmış herhangi iki kişinin bulunmadığını görür. Diğerlerine kaç kişiyle sıkıştıklarını soran kişinin eşinin kaç kişiyle el sıkışmış olduğunu bulunuz.

2. a, b, c, d pozitif reel sayıları için

$$\frac{12}{a+b+c+d} \le \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+d} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+d} +$$

$$\frac{1}{c+d} \le \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

3. $x^2 + y^2 + z^2 = 361$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

$x - y + z = 11$

denklemlerinin tüm (x, y, z) reel çözümlerini bulunuz.

4. Bir ABC üçgeninin B açısının iç açıortayına CE dikmesi, C açısının içaçıortayına da BD dikmesi indiriliyor. DE doğrusu, [AB] kenarını P noktasında ve [AC] kenarını Q noktasında kestiğine göre

$|AP| = |AQ|$

olduğunu ispatlayınız.

5. Bir ABC üçgeninin [BC] kenarına paralel olan d doğrusu, AB ve AC doğrularını sıra ile D ve E noktalarında kesiyor. BE doğrusu ile CD doğrusunun kesim noktası P olduğuna göre, P noktasının geometrik yerini bulunuz.

6. Hiç bir n pozitif tamsayı için

$n^4 + 3n^2 + 1$

sayısının bir tam kare olmadığını gösteriniz.

Not: Sınav süresi 3 saattir.

FONKSİYONEL DENKLEMLER:

Geçen sayıdaki problemlerin yanıtları.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (2') bağıntısını sağlasın. 2. den, her $r \in \mathbb{Q}$ için $f(r) = r$ olduğunu biliyoruz. Bir $x \in \mathbb{R}$ alalım, x e sırasıyla alttan ve üstten yaklaşan (r_n) ve (s_n) rasyonel sayı dizileri bulabiliriz. Yani $r_n, s_n \in \mathbb{Q}$, $r_n \le x \le s_n$ ve $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} s_n = x$. f artan bir fonksiyon olduğundan, $f(r_n) \le f(x) \le f(s_n)$ buluruz. Ancak $r_n, s_n \in \mathbb{Q}$, o halde $f(r_n)=r_n$, $f(s_n)=s_n$. Yani her n için $r_n \le f(x) \le s_n$ olduğunu gösterdik n'yi sonsuza götürürsek, $x \le f(x) \le x$, yani $f(x) = x$ çıkar.

2. $a < b$ olsun (2') bağıntısında $x = a$, $y = b - a$. alalım. $f(b) = f(a) + f(b-a)$ elde ettik. $b - a > 0$ olduğundan, verilen koşula göre $f(b - a) > 0$ yani $f(b) > f(a)$ olacaktır; f artandır.

3. 4(e) deki örneği geliştireceğiz. Bunun için her r pozitif rasyonel sayısının bir $m \in \mathbb{Z}$ ve t, s tek tamsayıları ile $r = 2^m \frac{t}{s}$ şeklinde yazılabileceğini gözlemleyelim. (Bu gösterim tektir, yani $2^m \frac{t}{s} = 2^{m'} \frac{t'}{s'}$ ise m=m', t=t' ve s=s' olacaktır.). Şimdi $f(r) = f(2^m \frac{t}{s}) = 2^m$ olarak tanımlayalım. Bu fonksiyonun verilen bağıntıyı sağladığı kolayca gösterilebilir.

4. Bir $t \in \mathbb{R}$ için $x + y = t$, $x - y = 1$ olacak şekilde x, y alalım. (yani $x = \frac{1}{2}(t + 1)$, $y = \frac{1}{2}(t - 1)$). Bağıntıda yerine koyarsak:

$f(t) - tf(1) = (t^2 - 1)t$ yani $f(t) = t^3 + (f(1)-1)t$ ve $f(1) - 1 = c$ dersek, $f(t) = t^3 + ct$ buluruz. Tersine her c sabit değeri için $f(t) = t^3 + ct$ fonksiyonu verilen bağıntıyı sağlar.

5. Bu aslında bir dizi sorusu. n tamsayısı için $f(n) = a_n$ dersek, bağıntı :

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \,, \quad a_1 = a_2 = 1$$

indirgeme denklemine dönüşür ki buradan (a_n) dizisinin Fibonacci dizisi olduğunu görürüz. (Cilt 1, Sayı 1'e bakınız.)

6. Önce f nin birebir olduğunu gösterelim : $f(y_1) = f(y_2)$ ise, her x için $\dfrac{f(x)}{y_1} = \dfrac{f(x)}{y_2}$ yani $y_1 = y_2$ buluruz.

Şimdi $y = 1$ alalım. $f(xf(1)) = f(x)$ bulduk, f birebir o halde $xf(1) = x$, yani $f(1) = 1$.

$x = 1$ alırsak, $f(1) = 1$ den dolayı

(A) Her $y \in \mathbb{Q}^+$ için $f(f(y)) = \dfrac{1}{y}$

bağıntısını elde ettik.

Verilen bağıntıda y yerine $f(\frac{1}{y})$ koyalım.

$$f(xf(f(\tfrac{1}{y}))) = \frac{f(x)}{f(\frac{1}{y})}$$

buluruz (A)'dan $f(f(\frac{1}{y})) = \dfrac{1}{\frac{1}{y}} = y$, ve

$$f(y) = f(f(f(\tfrac{1}{y}))) = \frac{1}{f(\frac{1}{y})}$$

elde ederiz, bu ise :

(B) Her $x, y \in \mathbb{Q}^+$ için $f(xy) = f(x)\,f(y)$ bağıntısını verir.

O halde istenen koşulu sağlayan f fonksiyonu, (A) ve (B) koşullarını da sağlayacaktır. Tersine (A) ve (B) yi sağlayan her f verilen koşulu da sağlar; bu yerine koyarak kolaylıkla gösterilebilir.

Problemimiz (A) ve (B) koşullarını sağlayacak bir $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ bulmaya indirgendi. İlk olarak 3. problemdekine benzer yollar, $p_1, p_2, p_3, \ldots$ sırasıyla asal sayıları göstermek üzere (yani $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots$) her $r \in \mathbb{Q}^+$ rasyonel sayısının uygun $m_1, m_2, m_3, \ldots$ tam sayıları ile

$$r = p_1^{m_1}\, p_2^{m_2} \ldots p_N^{m_N}$$

şeklinde yazılabileceğini gözleyelim. $f(p_1) = p_2$,

$f(p_2) = \dfrac{1}{p_1}$, $f(p_3) = p_4$, $f(p_4) = \dfrac{1}{p_3}$, ...,

$f(p_{2k-1}) = p_{2k}$ ve $f(p_{2k}) = \dfrac{1}{p_{2k-1}}$

olarak ve

$$f(p_1^{m_1}\, p_2^{m_2} \ldots p_N^{m_N}) = [f(p_1)]^{m_1} \ldots [f(p_N)]^{m_N}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bağıntılarını sağlar.

7. (1990 Olimpiyatı diye yazılmış, 1992 olacak!) Verilen bağıntıyı sağlayan fonksiyonun birebir olduğu 6. dakine benzer yolla kolayca görülür. Verilen bağıntıda x yerine $-x$ alırsak $x^2 = (-x)^2$ olduğundan $f(-x) = -f(x)$ olmalıdır.

$f(x) = x$ fonksiyonunun istenen bağıntıyı sağladığı hemen görülür. Bundan başka çözüm olmadığını gösterelim : Bir $a \in \mathbb{R}$ için $f(a) < a$ ise, verilen bağıntıda $y = a$ ve $x = \sqrt{a - f(a)}$ alırsak:

$$f(a) = f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2 = a + (f(x))^2$$

buluruz. $(f(x))^2 \geq 0$ olduğundan, bu $f(a) \geq a$ çelişkisini verir.

Eğer bir $a \in \mathbb{R}$ için $f(a) > a$ ise $\overline{a} = -a$ için $f(-a) = -f(a)$ olduğundan, $f(\overline{a}) < \overline{a}$ buluruz ki bu aynı çelişkiyi verir.