

Matematik ve Korku

Korku denli insanı yönlendiren, zamanına göre güç veren, zamanına göre zayıflatan bir duygu az vardır. Korkudan nefret, saygı, alay, cesaret, hatta tüm bu duyguların bir alaşımı da doğabilir.

Matematikten ve genel olarak bilimden sokaktaki insan korkar. Bilinmeyenin yarattığı bir korkudur bu, karanlıktan duyulan korkuya benzer. Salt sokaktaki insana özgü değildir bu duygu. Bir matematikçi de aynı duyguya kapılabilir. Ama matematikçi o duyguyu yenmesini bilir. Önünde yıllarca çözülememiş bir problem ve bir tutam beyaz kâğıt vardır. Edilgen kalmaz matematikçi. Sorunun bir kıyısından dalar, olmadı bir başka kıyısından... Kolay kolay pes etmez, yıllarını, hatta yaşamını adar soruna. Matematikçi yenilirse korkudan değil, mertçe bir savaştan sonra yenilmiştir. Ve kimbilir, belki de sorunun ilerde çözülmeye bir katkısı olmuştur. Bir gerçeğe bir yaşam adanmış, çok mu?

Korku nasıl alaya dönüşür?

– Matematiğim o kadar kötüydü ki, lisedeyken, hocamız, bir defasında şey sormuştu, hani ne derler, hah işte ondan... Ben de şey demiştim! Ha ha ha! Anla işte benim matematiğim o kadar kötüdür. Ha ha ha!

Kişi önce kendisiyle alay eder. Ama asıl amacı matematikle alay etmektir. Nitekim sözlerini aşağı yukarı şöyle sürdürür:

– Yahu o kargacık burgacık yazıları nasıl anlıyorsun? Aşkolsun!

Bu sözlerin sahibi her ne denli matematikçiye hayranlığını dile getiriyor gibi görünüyorsa da, aslında matematikçiyi başka bir dünyanın insanı olarak göstererek eksikliğin kendinde olmadığını kanıtlamaya çalışıyordur. Tuhaf olanın kendisinin değil, kargacık burgacık yazıları anlayanın olduğunu söylemek ister. Ona göre matematiği anlamamaktır doğal olan, anlamak değil. Savunmadadır. İçindeki ezikliği gidermek istemektedir.

Matematikçi bir kadın arkadaşım anlattı. Bir gece bir bara gider. Çok iyi bir matematikçi olduğu kerte de alımlı, zarif bir kadındır. Yanına bir adam sokulur. Adamın amacı belli. Eh, belki arkadaşımın amacı da pek başka değildi. Başlangıç zor olur ama başarırlar. Tanışma aşamasından sonra, adam kadına ne iş yaptığını sorar. Matematikçiyim yanıtını alınca adam önce bocalar, sonra gem vurdurmadan,

– Yemek yapmasını da biliyor musunuz? diye sorar.

Bu soru üzerine matematikçi arkadaşım adamı başından savar.

Kadın-erkek ilişkisinde geleneksel erkek daha güçlü, daha akıllı, daha becerikli, her bakımdan daha üstün olmak ister. Yukardaki çapkın da bu erkeklerden biridir. Matematikçi bir kadınla ne yapacağını bilmez. Alışık olduğu ilişkiyi kuramaz. Şaşırmıştır, ezilmiştir. Tek çıkış yolu işi alaya vurmaktır. Tuhaflığın kendisinde değil kadında olduğunu belirtir. “Sen kadın değilsin (çünkü senden üstün değilim)” demeye getirir.

İsviçre’de bir arkadaşım bir haftalık tatilde evine davet etmişti. Lisedeydim o zamanlar. Çağrıyı kabul edip evlerine gittim. Arkadaşımın babası köylüydü. İlkokuldan sonra okula gitmemiştir. Patates ve havuç tarlaları vardı. İsviçre’nin yoksullarındanlardı. Üstelik, İsviçre’nin en geri kalmış kantonunda otu-

ruyorlardı. Liseden sonra ne okuyacağımı sordu. Matematik deyince çok sevindi adamcağız. Hemen içkileri çıkardı. Matematiğin şerefine kaç kadeh kaldırdığımızı anımsamıyorum şimdi. Biraz sonra önüme bir dosya koydu. İçinde çözdüğü matematik problemleri varmış. Ve bu problemleri başka yerden almamış, kendi uydurmuş. Problemlerinden birini unutamıyorum: Saatin üç iğnesi, yani akrep, yelkovan ve saniye iğnesi, saat kaçta üstüste gelir? Elbet saat 12’de ve 24’te üstüste gelirler, ama bunların dışında... O kadar kolay bir problem değil, hele bir ilkokul mezunu için... Bu problemle aylarca uğraşmış. Bulmuş yanıtı en sonunda. Yıllardır yetiştirdiği patateslere ve havuçlara benzeyen kocaman nasırlı parmaklarıyla yazdığı inci gibi bir yazıyla çözümü kâğıda geçirip dosyasına koymuş.

Kahvelerde pinekleyenler aklıma geliyor da...

İşte bu kişi bilime ve matematiğe gerçek anlamda saygı duyar. Çünkü bilim için harcanan emeğin değerini bilir. Matematikten korkmaz, tam tersine matematiğe sahip çıkar. Matematikçi ya da bilimci olmak isteyen kızına “önce yemek yapmasını öğren” demez.

Araştırmanın yaşı yoktur. On beş yaşında yaptığım sözümona araştırmalardan aldığım zevk, bugün profesyonel bir matematikçi olarak yaptığım araştırmalardan aldığım zevkten bir dirhem daha az değildi. Yukarda anlattığım ilkokul mezunu köylünün araştırmasını ancak yaşamında hiç araştırma yapmamış kişi küçümseyebilir. Aynen, “çocuklar aşktan anlamaz” diyen aşktan nasibini almamış büyüklerin yaptığı gibi...

Çocuklarımızın matematikten, araştırmadan, soru sormaktan, bilmediklerinden korkmamaları, korkularını yenebilmeleri için ne yapabiliriz? Çeşitli yollar, yöntemler önerilebilir. Matematikçilerin büyük çoğunluğu oyun sever, çünkü oyun oynayarak matematikçi olmuşlardır ve matematik de bir tür oyundur. Matematik, felsefe gibi, sanat gibi, her şeyden önce dalga geçmektir. Çalışan matematikçinin dürtüsü topluma yararlı olmak gibi soy-

lu düşünceler değildir. Her insan gibi topluma, insanlara yararlı olmak ister matematikçi. Ama ilk amacı bu değildir. “Aaa ne güzel problem” der matematikçi. “Bunu çözerken amma da dalga geçeceğim’ der. Ve çocuksu bir coşkuyla işe koyulur.

Çocuğun matematikten korkmamasını sağlayacak, çocuğa matematiği sevdirecek çeşitli oyunlar vardır: satranç, dama, go, domino, aznif... İskambil oyunları kötü alışkanlık yapar diye çocuklara yasaklanmıştır ülkemizde. Anababalar belki de pek haksız sayılmazlar bu konuda. Öte yandan sağlam aile ortamında ve sağlıklı bir toplumda kâğıt oyunları zarar vermez. Pokerden 21’e, kaptıkaçtıdan 66’ya, piştiden briçe, bezikten bluma dek her türlü oyun öğreticidir. Bu konuda ilginç bir anım var. Bir matematikçi ailesi tanıyorum. Hem ana, hem baba matematikçi. Anne altı yaşına yeni girmiş kızına çarpmayı anlatmaktadır. Önce $2 \times 3 = 6$ örneğini verir. Küçük kız hemen atılır:

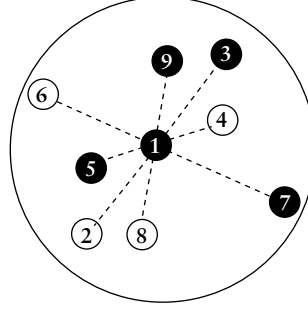
– Hani, on üç kere dört elli iki eder, onun gibi mi? diye sorar.

Küçük kız kendini bildi bileli kâğıt oyunları oynamaktadır. İskambil kâğıtlarında 4 renk olduğunu, her renkten 13 kâğıt olduğunu ve toplam 52 kâğıt olduğunu bilir. $13 \times 4 = 52$ eşitliğini kendi kendine bulmuştur. Çarpmayı bir kez daha keşfetmiştir. Nasıl her matematikçi kendinden önce bilinen matematiği bir kez de kendisi bulursa, bu 6 yaşındaki kız da çarpmayı yeniden bulmuştur. Çarpma artık onun malıdır. Daha o yaştan matematikçidir. Şimdi o kız büyüdü ve ABD’nin en iyi üniversitelerinden birinde okuyor.

Matematikçilerin büyüdülerinde oynadıkları oyunlar bildiğimiz oyunlardan değildir. Onlar artık kazanmak için değil, kimin kazanacağını bulmak için oynarlar. Matematikçilerin oynamaktan hoşlanacağı oyunlardan birkaç örnek sunayım.

1. Bu oyun yuvarlak bir masanın çevresinde, yuvarlak pullarla (örneğin tavla pullarıyla) oynanan iki kişilik bir oyundur. Her oyuncu sırası geldiğinde masanın üstüne bir pul koyar. Ama pu-

lunu başka bir pulun üstüne koyamaz. Pulunu koyacak yer bulamayan oyuncu kaybeder. Bu oyun iki oyuncudan biri tarafından kazanılır elbet. Ama, ben diyorum ki, iki oyuncudan biri öyle oynayabilir ki oyunu kesinlikle kazanır. Öbürü ne oynarsa oynasın, ne kadar düşünürse düşünsün, oyuncumuz her seferinde öyle bir hamle bulur ki, oyunu hep kazanır.



Yani oyuncuların birinin bir **her-zaman-kazanan-stratejisi** vardır. Hangi oyuncu, nasıl oynarsa kazanır? İşte matematikçi bu oyunu oynamaz, her-zaman-kazanan-stratejiyi bulmaya çalışır.

Birinci oyuncu oyunu her zaman kazanabilir. Birinci oyuncu şöyle oynarsa kazanabilir: İlk puluna masanın tam ortasına koyar (Yandaki şekle bakın. Koyu renkli pullar birinci oyuncunun pullarıdır.) Bu hamleden sonra, birinci oyuncu ikinci oyuncunun hamlelerinin (merkeze) göre simetriğini oynar hep. Yandaki şekilde bir oyun örneği verdik. Hamleleri 1, 2, 3, 4, 5, 6... diye gösterdik. Birinci oyuncunun hamleleri 1, 3, 5 gibi tek sayılı hamleler, ikinci oyuncunununkilerse 2, 4, 6 gibi çift sayılı hamleler:

Böylece ikinci oyuncu pulunu koyacak yer buldukça, birinci oyuncu da pulunu koyacak yer bulabilir. Dolayısıyla birinci oyuncu oyunu kaybedemez, yani kazanır.

Kıssadan hisse: Kimileyin nasıl kazanacağımızı değil, nasıl kaybetmeyeceğimizi düşünmeliyiz.

2. Bu da iki kişilik bir oyun. 25'ten başlayarak her oyuncu, öbür oyuncunun en son söylediği sayıdan 1 ya da 2 çıkarır. Birinci oyuncu, ilk hamlesinde, 25'ten ya 1 ya 2 çıkarır, yani ya 24 ya 23 der. Diyelim 24 dedi. İkinci oyuncu, birinci oyuncunun söylediği sayıdan ya 1 ya 2 çıkarır, yani ya 23 ya 22 der. Diyelim 22 dedi. Sıra gene birinci oyuncuda. Birinci oyuncu ya 21 ya 20 diyebilir. Oyun böyle sürer gider. İlk kez 0 (sıfır) de-

mek zorunda kalan oyunu kaybeder (eksi sayılar yasak.)

Bu oyunda da oyunculardan birinin her-zaman-kazanan-stratejisi vardır. Hangi oyuncunun? Ve o strateji nedir?

Düşünelim.

0 diyen kaybediyor.

Demek ki 1 diyen kazanıyor, çünkü öbür oyuncu 0 demek zorunda.

Demek ki 2 ya da 3 diyen kaybediyor, çünkü öbür oyuncu 1 diyebilir.

Demek ki 4 diyen kazanıyor, çünkü öbür oyuncu 2 ya da 3 demek zorunda.

Demek ki 5 ya da 6 diyen kaybediyor, çünkü öbür oyuncu 4 diyebilir.

Demek ki 7 diyen kazanıyor, çünkü öbür oyuncu 5 ya da 6 demek zorunda.

Demek ki 8 ya da 9 diyen kaybediyor, çünkü öbür oyuncu 7 diyebilir.

Bunu böyle sürdürüp kazanan ve kaybeden sayıları yazalım:

Kaybeden Sayılar	Kazanan Sayılar
0	1
2,3	4
5,6	7
8,9	10
11,12	13
14,15	16
17,18	19
20,21	22
23,24	25

Demek ki ikinci oyuncunun her-zaman-kazanan-stratejisi vardır. Birinci oyuncu ne derse desin, ikinci oyuncu sırasıyla 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4 ve 1 diyerek oyunu kazanır.

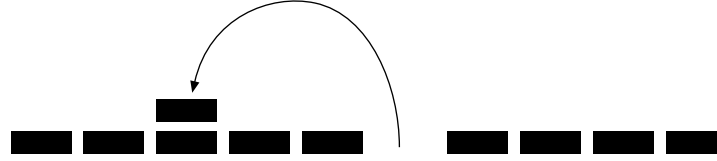
Burada ilginç olan, problemi bitmiş varsayıp, sondan başa gitmemiz.

Bu oyunun çeşitlemeleri de yapılabilir. Örneğin 47'den başlanabilir ve her oyuncu 1'den 5'e kadar bir sayı çıkarabilir. Bu oyunda her-zaman-kazanan-stratejisi olan oyuncuyu bulmayı okura bırakıyorum¹.

3. Bu oyun tek başına ve on tavla puluyla oynanır. Bu on tavla pulunu tek sıra olarak önünüze dizin:



Yapabileceğiniz bir tür hamle var: Bir pulu sağındaki ya da solundaki iki pul üstünden atlatarak sonraki pulun üstüne koyabilirsiniz. Ve bir tek kural var: Bir pula en çok bir kez dokunabilirsiniz. Amaç pulları ikişer ikişer dizmek. Örneğin yukarıdaki durumda soldan altıncı pulu kaldırıp soldan üçüncü pulun üstüne koyabiliriz ve aşağıdaki durumu elde edebiliriz:



Arkasından soldan ikinci pulu sağdaki iki pulun üstünden aşırıp şu durumu elde edebiliriz:

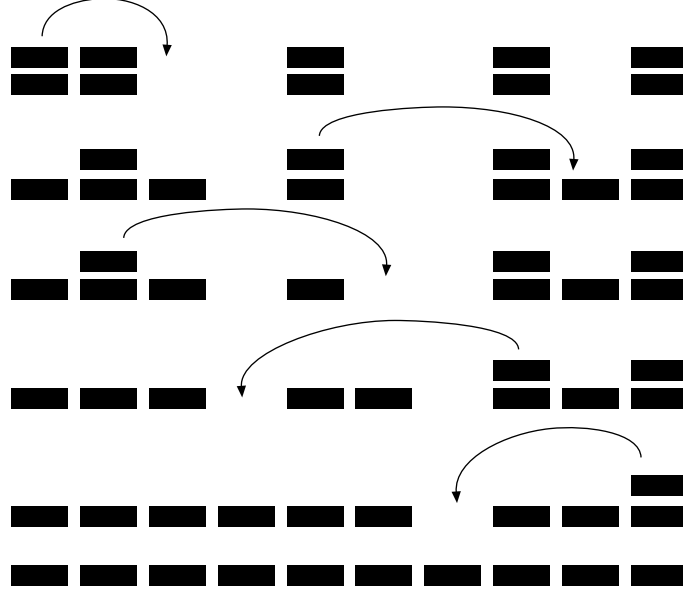


Bu hamleden sonra en soldaki pul yerinden oynayamayacağından oyunu burda kaybettik.

Nasıl kazanabiliriz? Biraz önceki oyun gibi düşüneceğiz. Oyunu bitmiş varsayıp geriye gideceğiz. Bunun için pulları iki-

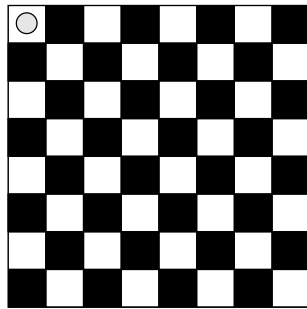
1 *Matematik ve Doğa* kitabının *Üç Oyun* başlıklı yazısında bu oyun üzerine daha çok bilgi var. (Bkz. *Matematik ve Doğa*, Nesin yayıncılık 2008.)

şer ikişer 5 küme olarak dizelim. Bu oyunun son durumu. Şimdi hamleleri teker teker geri alalım. Türlü biçimde geri alabiliriz hamleleri. İşte bir tanesi:



Şimdi geriye doğru gidin!

4. Gene tek kişilik bir oyun. Önünüze bir dama tahtası alın. En üstteki sol kareye bir tavla pulu koyun. O pulla şu hamleleri yapabilirsiniz: Pulu bir kare sağa, sola, aşağı ya da yukarı kaydırabilirsiniz. Her kareden geçerek ve yalnızca bir kez geçerek pulu en alt sağ kareye götürebilir misiniz? Götürebilirsanız nasıl götürürsünüz, götüremezseniz neden götüremezsiniz?



Doğru yanıt... “Hayır götüremem”dir. Niye mi? Dama tahtasında 64 kare vardır. Her kareden bir kez geçmemiz gerektiğine göre 63 hamle

yapabiliriz. Yani 63 hamlede en üst sol kareden en alt sağ kareye gitmeliyiz. Oysa bu iki kare beyaz. Ve tek sayılık hamlede beyaz bir kareden gene beyaz bir kareye gidilemez!

Yanıt ne kadar basit değil mi? Matematiğin güzelliği işte burda. Nereden kaynaklanıyor bu güzellik? Estetlerin üstünde durmaları gereken ve birçok estetin de üstünde durduğu bir konudur matematiğin güzelliği.

Bence burdaki güzellik şurdan kaynaklanıyor: Yanıt şaşırtıcı bir yalınlıkta. Elimizdeki verilerden yalnızca işimize yarayanı kullanıyoruz. Pulun hangi kareden hangi kareye gideceğinden çok, beyaz bir kareden gene beyaz bir kareye gitmesi önemli olan. Ve hamle sayısının 63 olmasından çok bir tek sayı olması önemli. Çok daha genel bir sonuç bulduk: beyaz bir kareden gene beyaz bir kareye tek sayıda hamleyle gidemeyiz. Oyunun çözümü bu genel sonucun özel bir hali. Çoğu zaman olduğu gibi burda da genel teoremin kanıtı, özel halin kanıtından daha kolay ve daha şık.

Bir de aynı soruyu bir dama tahtası için değil de, herhangi bir 8×8 karelik tahta için sorsaydım, yanıtı bulmak daha zor olurdu. Çünkü önce 8×8 'lik tahtayı dama tahtası gibi boyamak gerekecekti. Sonra da yukardaki akıl yürütmeyi yapacaktık.

5. İki oyuncu ortaya bir deste kâğıt koyarlar. Destedeki kâğıt sayısı değişebilir. Birinci oyuncu desteyi ikiye ayırır. Ancak tam ortadan ikiye ayıramaz. Örneğin destede 24 kâğıt varsa, bu desteyi 12-12 olarak iki desteye ayıramaz. İkinci oyuncu iki desteden birini seçecek ve seçtiği bu desteyi ikiye ayıracak. Böylece oyunda üç deste olacak. İkinci oyuncu da desteyi tam ortadan ikiye bölemez. Birinci oyuncu bu üç desteden birini ikiye ayıracak... Oyun böyle sürer. Destelerden birini ikiye bölemeyen, yani hamle yapamayan ilk oyuncu oyunu kaybeder.

Eğer oyunun başında destede 2 kâğıt varsa, birinci oyuncu kaybeder, çünkü desteyi ortadan ikiye bölmeye hakkı olmadı-

ğından oyuna başlayamaz bile.

Eğer destede 3 kâğıt varsa ikinci oyuncu kaybeder: Birinci oyuncu desteyi 1–2 diye ikiye ayırır.

Eğer destede 4 kâğıt varsa, birinci oyuncu desteyi 2–2 diye ayıramayacağından, ancak 3–1 diye ayırır. İkinci oyuncunun da bir tek seçeneği vardır: Üçlük desteyi 1–2 diye ayırmak ve kazanmak. Demek ki 4'lük oyunu ikinci oyuncu kazanır.

Eğer destede 5 kâğıt varsa, birinci oyuncunun iki seçeneği vardır. Oyunu ya 4–1 ya da 2–3 yapar. Oyunu 2–3 yaparsa kaybeder, dolayısıyla 4–1 yapmalıdır. Oyunu 4–1 yapar ve kazanır.

Eğer destede 6 kâğıt varsa, birinci oyuncunun iki seçeneği vardır. Oyunu ya 5–1 yapacaktır ya da 4–2. Oyunu 3–3 yapamaz, çünkü kâğıtları tam ortadan bölemez. Eğer oyunu 5–1 yaparsa kaybeder, çünkü öbür oyuncu oyunu 4–2–1 yapar. Öte yandan oyunu 4–2 yaparsa kazanır. Demek ki 6 kâğıtlık desteye başlanan oyunu birinci oyuncu, iyi oynarsa, kazanır.

n kâğıtlık desteye oyuna başlanırsa, hangi oyuncunun kazanan stratejisi vardır? Küçük sayılar için arkadaşlarımla birlikte hesapladık ve şu sonuçları bulduk: Eğer oyuna 2, 4, 7, 10, 20, 23 ya da 26 kâğıtla başlanırsa ikinci oyuncu oyunu -iyi oynarsa- kazanır. Eğer kâğıt sayısı 28 ya da 28'den azsa ve 2, 4, 7, 10, 20, 23, 26 değilse oyunu birinci oyuncu -iyi oynarsa- kazanır. Bunun dışında fazla bişey bilmiyorum.

6. Ele alacağımız son oyun en az iki kişi arasında oynanır. İki kişi arasında oynatalım. İki oyuncu sırayla zar atar. Gelen zarlar toplanır. 100'e ilk erişen ya da 100'ü ilk geçen oyunu kazanır. Bir oyuncu üstüste dilediğince zar atabilir; atabilir ama 1 gelmezse... 1 geldiğinde sayıları silinir. Dilediği zaman zar atmaktan vazgeçer. O zaman, o ana dek attığı zarların toplamı hanesine **bir daha hiç silinmemek üzere** yazılır.

Diyelim birinci oyuncu 6 attı. Dilerse bir kez daha zar atabilir. Atar da 1 gelirse daha önce attığı 6 silinir ve sıra öbür

oyuncuya geçer. Diyelim ikinci kez attı ve 3 geldi. Şimdi birinci oyuncunun toplam 9 sayısı oldu. Bir kez daha zar atmalı mı? Atar da 1 gelmezse sorun yok, ama 1 gelirse yazdırmadığı 9 puanı silinecek. Diyelim birinci oyuncu burda durdu. Birinci oyuncunun hanesine 9 yazılır. Bu 9, oyunun sonuna değin silinmez. Şimdi sıra ikinci oyuncuda. İkinci oyuncu 1 atarsa, sıra gene birinci oyuncuya gelir. Diyelim ikinci oyuncu 5 attı. Geride olduğundan şansını bir kez daha denedi ve gene 5 geldi. Toplam 10 puanı oldu. Pas geçebilir. Diyelim pas geçti. Böylece ikinci oyuncunun hanesine bir daha silinmemek üzere 10 yazıldı. Sıra gene birinci oyuncuda. Birinci oyuncu ilk atışta 6 attı. Eğer pas geçerse bu sayı daha önceki 9'a eklenir ve bir daha hiç silinmez. Ama diyelim ikinci oyuncu 6'yı az bularak bir kez daha zar attı. Şans bu ya, ikinci zar 1 geldi. Birinci oyuncunun 6 puanı silindi, ama daha önce elde ettiği 9 puana dokunulmadı. Oyun böylecene sürer... 100'e ilk erişen ya da 100'ü ilk geçen oyunu kazanır.

Soru ne? Soru her zamanki gibi en iyi stratejiyi bulmak. Hiç durmamacasına, 100'e erişinceye değin zar atmak iyi bir strateji olmasa gerek. Şansı bunca zorlamamalı. Bir zar atıp durmak da iyi bir strateji olmamalı. 6 geldiğinde durmak hadi neyse de, 2 geldiğinde durmanın pek anlamı yok gibi. Belli bir toplamdan sonra durma stratejisi izlenmek isteniyorsa hangi toplamdan sonra durmalı? 10 aşıldığında durmalı mı örneğin? Yoksa 20 aşıldığında mı durmalı?

Bu oyun şansa bağlı olduğundan kazanan strateji yoktur. Öte yandan, olasılık olarak düşünüldüğünde bir "çoğu-zaman-kazandıran-strateji" vardır. Bu anlamda en iyi strateji nedir? Hatta bu oyunda "en iyi strateji" var mıdır? Yanıtı bilmiyorum.

Kimi durumlarda sezgi yardımımıza koşuyor. Örneğin öbür oyuncunun 99 bizimse 0 puanımız varsa, hakkımız olduğu sürece zar atmayı sürdürmeliyiz. Peki, ya iki oyuncunun da 80 puanı varsa? Hatta ilk oyuncuysak ve oyunun başındaysak?

İlk zardan sonra durmak iyi bir strateji midir? Bu stratejinin beklentisini hesaplayalım. Yani bu stratejiyle oynayan oyuncunun, hanesine ortalama kaç sayı yazdıracağını bulalım. Gelecek zarlar belli: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Her zarın olasılığı aynı: $1/6$. 1 gelirse oyuncunun hanesine 0 yazılacak. 2 gelirse 2, 3 gelirse 3, 4 gelirse 4, 5 gelirse 5, 6 gelirse 6 yazılacak. Beklentiyi bulmak için haneye yazılacak sayılarla bu sayıları elde etme olasılıklarını çarpacağız ve bu çarpımları topluyoruz. Sözkonusu stratejinin beklentisi

$$0 \times \frac{1}{6}, 2 \times \frac{1}{6}, 3 \times \frac{1}{6}, 4 \times \frac{1}{6}, 5 \times \frac{1}{6}, 6 \times \frac{1}{6}$$

sayılarının toplamıdır. Yani

$$\frac{20}{6} = 3,333\dots$$

tür. Bu şu demektir. Bu stratejiyle bin kez zar atsanız, ortalamanız aşağı yukarı 3,333 olacaktır.

Belli bir sayıdan sonra durma stratejisi izlenmek isteniyorsa hangi sayıdan sonra durmalı? Diyelim toplamımız en az 5 olduğunda durma kararı aldık. Bu stratejiyle beklentimiz nedir, yani bu stratejiyle oynayan bir oyuncu hanesine ortalama kaç yazdırır? Bu stratejiyle oynandığında oyun hangi zarlardan sonra sona erer? Toplamı en az beş eden zarları, zarların toplamını ve olasılıklarını aşağıda teker teker sıraladık:²

Zar	Toplam	Olasılık
6	6	$1/6$
5	5	$1/6$
4-6	10	$1/36$
4-5	9	$1/36$
4-4	8	$1/36$
4-3	7	$1/36$
4-2	6	$1/36$
3-6	9	$1/36$

² Toplamı sıfır olan sayıları listeye koymadık.

3-5	8	1/36
3-4	7	1/36
3-3	6	1/36
2-6	8	1/36
2-5	7	1/36
2-4	6	1/36
2-3	5	1/36
2-2-6	10	1/216
2-2-5	9	1/216
2-2-4	8	1/216
2-2-3	7	1/216
2-2-2	6	1/216

Şimdi de toplamlarla olasılıkları çarpıp çıkan sonuçları toplayalım:

$$6 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 10 \times \frac{1}{36} + 9 \times \frac{1}{36} + \dots + 6 \times \frac{1}{216}$$

Sonuç 1042/216, yani aşağı yukarı 4,685... çıkar. Bu sayı yukarıda bulduğumuz 3,3333... sayısından daha büyük olduğundan, bu strateji ilk stratejiden daha iyidir.

Bir de iki zar atıp durmak var. Bu stratejinin beklentisi de kolaylıkla hesaplanabilir ve 200/36, yani 5,555... bulunur. Demek ki bu son strateji yukardaki stratejilerden daha iyi.

Ya n zar atıp durmak? Bunun beklentisi kaçtır? Bu beklentiye B_n diyelim. Tanımdan aşağıdaki eşitlik çıkar:

$$B_n = \sum_{a_1, \dots, a_n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}} (a_1 + \dots + a_n) (1/6)^n$$

Bu eşitlikten kolaylıkla aşağıdaki tümevarımsal eşitlik bulunur:

$$B_n = \frac{5B_{n-1}}{6} + 4 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Bu son eşitlikten de, n üzerine tümevarımla,

$$B_n = 4n \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

eşitliği çıkar ($B_1 = 20/6 = 4 \times 5/6$ eşitliğini biliyoruz, yani tümevarıma başlayabiliriz.) Bu hesaba göre

$$B_5 = B_6 = \frac{15.625}{1.944} \approx 8,04$$

bulunuyor. Ve bu değerler bu tür stratejiler arasında en büyük beklentisi olanlardır.

Bu hesapları Bilkent Matematik Bölümü'nden Fırat Çelikler yapmıştır. Bunun dışında Fırat Çelikler'in yaptığı bir bilgisayar yazılımı, **denenen** çeşitli stratejiler arasından, 20 geçildiğinde durmanın, beklentisi en iyi strateji olduğunu gösterdi³. Bu stratejinin beklentisi 8,14'ü aşıyor, bilgisayar 8,1417948937... değerini verdi. 20'yi aşmakla 21'i aşmanın beklentilerinin aynı olduğunu gördük. Okur, beklentisi daha yüksek bir strateji bulursa ve yazara stratejisini söylese, yazarı sevindirir.

n 'de durma stratejilerinin beklentileri şöyle (yuvarlak hesap, $\pm 0,005$):

n	$B_n =$ Beklenti	n	$B_n =$ Beklenti
2	3,33	18	8,09
3	3,83	19	8,12
4	4,31	20	8,14
5	4,82	21	8,14
6	5,38	22	8,13
7	5,97	23	8,10
8	6,24	24	8,05
9	6,58	25	8,00
10	6,87	26	7,93
11	7,14	27	7,86
12	7,37	28	7,77
13	7,57	29	7,68
14	7,72	30	7,58
15	7,85	31	7,48
16	7,95	32	7,39
17	8,03	33	7,32

Her iki oyuncu da 20'de durmaya karar verirlerse kim kazanır?

Birinci oyuncu daha sık kazanır elbet, çünkü oyuna başlamanın bir avantajı vardır.

Fırat Çelikler, bilgisayarda iki oyuncuya bu oyunu oynattı ve birinci oyuncunun %53-54 sıklığında oyunu kazandığını buldu. Eğer ikinci oyuncu stratejisini değiştirirse, örneğin 23'te durma stratejisini uygularsa, ikinci oyuncunun kazanma olasılığı artıyor, ama hiçbir zaman %50'yi aşmıyor. Bilgisayar denemelerinden, ikinci oyuncunun en iyi stratejisinin 25'i aşp durmak olduğu belirlendi. Bu stratejiyle birinci oyuncunun kazanma sıklığı %52'ye kadar düşüyor.

Bılar'dan bir öğrenci, toplam 20 olduğunda durulması gerektiğini şöyle gösterdi: T belli bir ana dek elde ettiğimiz toplam olsun. Bu toplamdan sonra bir kez daha zar atmalı mıyız? Bir sonraki atışta 1, 2, 3, 4, 5, 6 zarlarından birini atabiliriz ve toplamımız sırasıyla 0, $T+2$, $T+3$, $T+4$, $T+5$, $T+6$ olur. Her bir toplama erişme olasılığımız $1/6$ 'dır. Dolayısıyla bir zar daha attığımızda toplamımız ortalama

$$T' = \frac{0}{6} + \frac{T+2}{6} + \frac{T+3}{6} + \frac{T+4}{6} + \frac{T+5}{6} + \frac{T+6}{6}$$

olacak. Biraz hesapla,

$$T' = \frac{5T+20}{6}$$

eşitliğini buluruz. Yani bir sonraki atışta toplamımız ortalama

$$T' = \frac{5T+20}{6}$$

dır. Eğer T' , T 'den küçükse bir zar daha atmamalıyız, büyükse atmamızdır. Ne zaman T' , T 'den küçüktür? Yani T 'nin hangi değerleri için

3 n arttıkça n 'de durmanın beklentisinin hesapları çok karışık olduğundan, bu hesaplar bilgisayara yaptırıldı.

$$T > T' = \frac{5T + 20}{6}$$

eşitsizliği doğrudur? Küçük bir hesapla $T > 20$ bulunur. Yani toplamımız 20'yi geçtiğinde durmalıyız.