

Sonsuz Odalı Otel¹

Bir oteliniz var. Otelinizin sonsuz sayıda odası var. Her odanın bir numarası var: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Böylece sonsuza kadar gidiyor.

En sonuncu oda yok...

Sonsuz numaralı oda da yok. Her odanın numarası sonlu. Sadece oda sayısı sonsuz. Aşağıdaki gibi...

OTEL	1	2	3	4	5	6	7	8	...
------	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

Birinci Hikâye. Şanslı bir gününüzdesiniz, bir otobüs dolusu müşteri geliyor. Sonsuz tane... Adları 1, 2, 3, 4, 5, 6,...

OTOBÜS	1	2	3	4	5	6	7	8	...
--------	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

Hepsine bir oda veriyorsunuz. 1 numaralı müşteri 1 numaralı odaya, 2 numaralı müşteri 2 numaralı odaya...

Her şey yolunda seyrederken, birdenbire bir müşteri daha geliyor. Bu müşteriye nasıl bir oda bulursunuz?

¹ Bu yazıyı süsleyen otel örneğini ilk kez Martin Gardner'in bir kitabında gördüm. Matematiksel fikir Georg Cantor'a aittir.

Bu soruyu sorduğumda aldığım yanıtlar genellikle şöyle oluyor:

- En sona... Sonuncu odaya... (Sonuncu oda yok ki!..)
- Sondan bir sonrakine... (Sonuncu oda yok ki bir sonraki olsun!)
- İki kişiyi aynı odada yatırırım... (Yok öyle numara...)
- Yeni bir oda yaparım... (Yok daha neler, yeni bir otel yapıldu olacak!)
- Resepsiyonda yatırırım... (Bu da olmaz, illa bir oda olacak...)
- Başka bir otel bulurum...
- Evimde yatırırım...

Doğru yanıt şöyle: Yerleşmiş müşterileri bir oda kaydırırım. 1 numaralı müşteri 2 numaralı odaya, 2 numaralı müşteri 3 numaralı odaya, 3 numaralı müşteri 4 numaralı odaya geçer, herkes birer kayar ve böylece boşalan 1 numaralı odaya yeni gelen müşteriyi koyarım...

“En son müşteri nereye gidecek?” demeyin, en son müşteri yok. Nasıl en son oda yoksa, en son müşteri de yok.

İkinci Hikâye. Çok şanslı bir gününüzdesiniz, bir otobüs dolusu müşteri geliyor. Sonsuz tane... Adları $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$

Hepsine bir oda veriyorsunuz. a_1 'i 1 numaralı odaya, a_2 'yi 2 numaralı odaya...

Her şey yolunda seyrederken, birdenbire... Birdenbire bir otobüs dolusu müşteri daha geliyor... Onda da sonsuz tane müşteri var. Adları $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, \dots$ Odalarımız dolu. Sonsuz tane yeni müşteri geldi. Bu yeni müşterileri nasıl yerleştirirsiniz?

Aldığım yanıtlar şöyle olur genelde:

- Yerleştirmem! (Kahkahalar...)
- Her odaya ikişer kişi koyarım... (Bunun yasak olduğunu daha önce söylememiş miydim?)

– Birer kaydırıp önce b_1 'i, sonra birer daha kaydırıp b_2 'yi, sonra birer daha kaydırıp b_3 'ü yerleştiririm ve bunu böyle sonsuza kadar devam ettiririm... (Herkes yerleştiğinde a_1 nerede olacak?)

Doğru yanıt şöyle: Birinci müşterileri çift sayılı odalara koyarım: a_1 'i 2'ye, a_2 'yi 4'e, a_3 'ü 6'ya, a_4 'ü 8'e, genel olarak a_n 'yi $2n$ numaralı odaya koyarım. Böylece tek sayılı odalar boşalır, onlara da ikinci otobüsteki müşterileri yerleştiririm: b_1 'i 1'e, b_2 'yi 3'e, b_3 'ü 5'e, b_4 'ü 7'ye, genel olarak b_n 'yi $2n - 1$ numaralı odaya yerleştiririm...

Üçüncü Hikâye. Çok, ama çok şanslı bir gününüzdesiniz, sonsuz otobüs dolusu müşteri geliyor. Sonsuz tane otobüs... Herbirinin numarası var: 1, 2, 3, 4, 5, 6,...

Ve herbir otobüste sonsuz tane müşteri var...

Birinci otobüsün müşterileri: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), ...

İkinci otobüsün müşterileri: (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), ...

Üçüncü otobüsün müşterileri: (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), ...

...

Müşterileri odalara nasıl yerleştirirsiniz?

Birinci otobüsün müşterilerini 2, 4, 8, 16, 32, 64 gibi 2'nin katları olan odalara yerleştirirsiniz.

İkinci otobüsün müşterilerini 3, 9, 27, 81, 243 gibi 3'ün katları olan odalara yerleştirirsiniz.

Üçüncü otobüsün müşterilerini 5, 25, 125, 625 gibi 5'in (4'ün değil!) katları olan odalara yerleştirirsiniz.

Dördüncü otobüsün müşterilerini 7'nin katları olan odalara yerleştirirsiniz.

Beşinci otobüsün müşterilerini 11'in katları olan odalara yerleştirirsiniz.

Genel olarak, n 'inci otobüsün müşterilerini n 'inci asalın katları olan odalara yerleştirirsiniz.

Bu yöntemle her müşteri bir odaya yerleştiği gibi, geriye sonsuz tane boş oda kalır. Örneğin, 6, 10, 12, 14, 15, 18 numaralı odalar boştur.

Bir Başka Çözüm. Son problemi bir başka türlü de çözebiliriz. (n, m) sayılı müşteriyi, yani n inci otobüsün m inci müşterisini $2^n(2m - 1)$ numaralı odaya yerleştirelim... Böylelikle hepsine bir oda düşer. Otobüsleri sıralarla, müşterileri sütunlarla gösterelim, kesişime de oda numarasını yazalım:

	1	2	3	4	...
1	2	6	10	14	...
2	4	12	20	28	...
3	8	24	40	56	...
4	16	48	80	112	...

Sadece çift sayılı odalar kullanıldığından, sonsuz tane oda gene boş kalır.

Eğer bütün odaları kullanmak istiyorsak, (n, m) sayılı müşteriyi $2^{n-1}(2m - 1)$ numaralı odaya yerleştirelim, yani yukarıdaki oda numaralarını 2'ye bölelim... O zaman müşteriler şöyle yerleşirler:

	1	2	3	4	...
1	1	3	5	7	...
2	2	6	1	14	...
3	4	12	20	28	...
4	8	24	40	56	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

9 numaralı odanın boş kaldığını sanmayın.

$$9 = 2^0 \times 9 = 2^0 \times (2 \times 5 - 1)$$

olduğundan, $(1, 5)$ sayılı müşteri 9 numaraya yerleşir. 72 numaralı odaya da $(4, 5)$ sayılı müşteri yerleşir. Bu yöntemle her oda dolar.

Bir Başka Çözüm Daha: Müşterileri şöyle yerleştirelim:

	1	2	3	4	5	6
1	1	3	6	10	15	21
2	2	5	9	14	20	
3	4	8	13	19		
4	7	12	18			
5	11	17				
6	16					

Bu yerleştirmenin bir formülünü bulabilir misiniz? Örneğin, (23, 45) sayılı müşterinin nereye gideceğini uzun uzun uğraşmadan bulabileceğiniz bir formül yazabilir misiniz?

