

Kesirli Sayıları Saymak

Altıdan yukarı sayamayan aritmetiği zayıf bir kabilenin re-
isliğine en fazla hayvanı olan kişi getirilirmiş. Hayvanları
nasıl sayarlardı diye merak ediyor insan. Kimin daha fazla hay-
vanı olduğunu bulmak için saymaya gerek yoktur ki! Hayvan-
ları karşılaştırmak/eşleştirmek yeterlidir. İki reis adayının hay-
vanları yanyana iki ağıla konur, sonra ağıllardan hayvanlar bi-
rer birer çıkarılır. Ağılı ilk boşalan seçimi kaybeder.

İlkel bir kabilenin bulduğu bu iki kümeyi karşılaştırma yön-
temini Batı uygarlığı çok geç bulmuştur. Bu yöntem 19. yüzyı-
lın ikinci yarısında Alman matematikçi Georg Cantor tarafın-
dan keşfedilmiştir.

Örneğin şu soruyu soralım:

\mathbb{N} , doğal sayılar kümesi olsun. Yani,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

olsun. \mathbb{S} de, 0'dan büyük doğal sayılar kümesi olsun. Yani,

$$\mathbb{S} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

kümesi olsun. Bu iki kümeden hangisinde daha fazla sayı vardır?

Okur, büyük bir olasılıkla \mathbb{N} kümesinde daha fazla sayı ol-
duğunu söyleyecektir. Çünkü, diyecektir okur, \mathbb{S} kümesi \mathbb{N} kü-
mesinin bir altkümesidir, yani \mathbb{S} 'nin her ögesi \mathbb{N} kümesindedir;
ayrıca \mathbb{N} kümesinde \mathbb{S} kümesinde olmayan 0 sayısı vardır; de-

mek ki \mathbb{N} kümesinde bir fazla öge vardır...

Aristo da böyle düşünürdü. Aristo, “Bütün, parçadan daha büyüktür” derdi. Aristo mantığında bu böyleydi. Ama artık değil, en azından matematikte değil. Daha doğrusu çeşitli büyüklük kavramları vardır.

Cantor’un ve günümüzün matematiğinin “öge sayısı” tanımına göre, her iki kümede de aynı sayıda öge vardır. İlkel kabilenin eşleştirme yöntemini kullanalım:

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbb{N} & = & \{0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, \dots\} \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \mathbb{S} & = & \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, \dots\} \end{array}$$

Demek ki \mathbb{S} kümesinin öğeleriyle \mathbb{N} kümesinin öğeleri arasında eşleşme var: \mathbb{N} kümesinin **her** ögesini, \mathbb{N} kümesinin **bir ve bir tek** ögesine eş düşürebiliyoruz.

Cantor’un tanımına göre, eğer iki küme arasında bir “eşleşme” varsa, o zaman iki kümenin “öge sayısı eşittir.” Dolayısıyla \mathbb{N} ve \mathbb{S} kümelerinin öge sayısı birbirine eşittir.

Örneğin, Cantor’a göre, çift tamsayılar bütün tamsayılar kadardır, ne fazla ne eksik. Yani,

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

tamsayılar kümesiyle

$$2\mathbb{Z} = \{ \dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots \}$$

çift tamsayılar kümesinin öge sayıları (Cantor’un tanımına göre) birbirine eşittir.

\mathbb{Z} kümesiyle $2\mathbb{Z}$ kümesinin nasıl eşleştirildiği bariz: n tamsayısını $2n$ tamsayısıyla eşleştirin:

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbb{Z} & = & \{ \dots, & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, \dots \} \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 2\mathbb{Z} & = & \{ \dots, & -6, & -4, & -2, & 0, & 2, & 4, & 6, \dots \} \end{array}$$

“Öyle değildir, görüldüğü gibi \mathbb{Z} kümesinde $2\mathbb{Z}$ kümesinden daha çok öge vardır” demeyin. Cantor’un **tanımına göre** her iki kümede de eşit sayıda öge vardır.

“Ama iki küme birbirine eşit değil ki...” de demeyin... Çünkü ben iki kümenin birbirine eşit olduğunu söylemedim ki, yalnızca “aynı sayıda” elemanları olduğunu söyledim.

$3/4$, $1/2$, $-56/7$ gibi sayılara **kesirli sayı** denir. Kesirli sayılar, iki a ve $b \neq 0$ tamsayıları için a/b biçiminde yazılabilen sayılardır. $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı değildir. $\sqrt{2}$ 'nin kesirli olmadığını kanıtını yazılarımda daha önce birkaç vermiştim, bir kez daha vermeyeceğim. π sayısı da kesirli değildir. Ama 5 sayısı kesirlidir, çünkü $5 = 5/1$ eşitliği geçerlidir. $\sqrt{4}$ ve $2\pi/3\pi$ sayıları da kesirlidir.

Pozitif kesirli sayılarla doğal sayılar arasında bir eşleşme vardır.

Birinci Yöntem. Örneğin şöyle:

$$0/1 \rightarrow 0$$

$$1/1 \rightarrow 1$$

$$1/2 \rightarrow 2$$

$$2/1 \rightarrow 3$$

$$1/3 \rightarrow 4$$

$$3/1 \rightarrow 5$$

$$1/4 \rightarrow 6$$

$$2/3 \rightarrow 7$$

$$3/2 \rightarrow 8$$

$$4/1 \rightarrow 9$$

$$1/5 \rightarrow 10$$

$$5/1 \rightarrow 11$$

$$1/6 \rightarrow 12$$

$$2/5 \rightarrow 13$$

$$3/4 \rightarrow 14$$

$$4/3 \rightarrow 15$$

$$5/2 \rightarrow 16$$

$$6/1 \rightarrow 17$$

...

İki kümeyi nasıl eşleştirdiğimi anlatayım: a/b kesirli sayılarını önce $a + b$ sayısının büyüklüğüne göre diziyoruz, sonra küçük a 'dan büyük a 'ya gidiyoruz. Tabii aradan daha önce sıraladığımız sayıları çıkarıyoruz. Örneğin, $a + b = 8$ olan kesirli a/b sayılarını şöyle diziyoruz:

$$1/7, 3/5, 5/3, 7/1.$$

($2/6, 4/4, 6/2$ daha önce dizilmişti.) Daha sonra şu kesirli sayılar geliyor:

$$1/8, 2/7, 4/5, 5/4, 7/2, 8/1.$$

Ardından

$$1/9, 3/7, 7/3, 9/1$$

sayıları geliyor.

Bu yöntemle $52/47$ kesirli sayısının hangi doğal sayıyla eşleştirildiğini bulmak pek kolay değildir.

Farey'in Yöntemi. Çok tuhaf gelebilecek bir başka eşleştirme daha vardır. İlkokulda sık sık yapılan

$$(a/b) + (c/d) = (a + c)/(b + d)$$

hatasını kullanır bu yöntem. $0/1$ ve $1/0$ “sayı”larından başlayalım (son “sayı”yı umursamayın şimdilik):

$$0/1, 1/0$$

Bu iki “sayı”nın tam ortasına, “toplam”ları olan $(0/1) + (1/0) = 1/1$ sayısını yazalım:

$$0/1, 1/1, 1/0$$

İki yeni aralığımız var: $[0/1, 1/1]$ ve $[1/1, 1/0]$ aralıkları. Bu aralıklara uçların “toplam”larını, yani,

$$0/1 + 1/1 = 1/2 \text{ ve } 1/1 + 1/0 = 2/1$$

sayılarını yazalım:

$$0/1, 1/2, 1/1, 2/1, 1/0$$

Bu beş sayı dört yeni aralık belirliyor. Bu dört aralığa, aralıkların uçlarının “toplam”larını yazalım:

$$0/1, 1/3, 1/2, 2/3, 1/0, 1/1, 3/2, 2/1, 3/1, 1/0$$

Bunu böylece sürdürelim. Bir sonraki aşamada
0/1, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 1/1, 4/3, 3/2, 5/3,
2/1, 5/2, 3/1, 4/1, 1/0

sayıları belirir.

Böyle devam ederek her kesirli sayıyı yalnız bir kez ve sadeleşmiş biçimde yazarız... Bunun bildiğim kanıtı uzun ama oldukça kolaydır. Bu yüzden kanıtını vermeyeceğim burada.

Şimdi kesirli sayıları Farey'in yukardaki açıkladığım yöntemle, belirli sırasına göre sayın. Yalnız 1/0'ı atlamayı unutmayın, öyle bir sayı yoktur!

