

Sihirli Kareler (II)

Bir önceki yazıda, n bir tek tamsayı olduğunda $n \times n$ sihirli karelerin nasıl yapılacağını öğrenmiştik. Bu yazıda n 'nin çift olduğu $n \times n$ boyutlu sihirli kareleri ele alacağız.

Her zaman yaptığımız gibi örneklerle başlayalım. Önce geçen yazıda da verdiğimiz ve sanata da yansıyan¹ ünlü 4×4 sihirli kareyi gösterelim:

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Şimdi de 6×6 'lık sihirli kare:

1	34	33	32	9	2
30	11	25	24	14	7
29	22	16	17	19	8
10	18	20	21	15	27
6	23	13	12	26	31
35	3	4	5	28	36

¹ Albrecht Dürer'in (1471-1528) Melancholia'sına.

Son olarak, bu yazıda örnek olarak alacağımız 8×8 'lik sihirli kare:

64	63	3	4	5	6	58	57
56	55	11	12	13	14	50	49
17	18	46	45	44	43	23	24
25	26	38	37	36	35	31	32
33	34	30	29	28	27	39	40
41	42	22	21	20	19	47	48
16	15	51	52	53	54	10	9
8	7	59	60	61	62	2	1

2×2 'lik sihirli kare yok. Deneyin, neden olmadığını hemen anlarsınız: 1 sayısını bir yere koymalıyız. Orası kesin. 2'yi de bir yere koymalıyız. Ama 2 sayısını nereye koyarsak koyalım, 1'le ya aynı sıraya ya aynı sütuna ya da aynı çapraza gelecek ve sihirli toplam $1 + 2 = 3$ olacak. Dolayısıyla 4'ü koyamayacağız!

Cornelius Agrippa'ya (1486–1534) göre 1×1 'lik sihirli kare yani

1

karesi sonsuzluğu ve birimi (aynı anda!) simgeliyormuş. 2×2 'lik sihirli karenin olmaması ise, sıkı durun, dört temel ögenin -yani hava, toprak, ateş ve suyun- yetersizliğinin kanıtıymış. Neye yetersizse... Cornelius sihirbaz ve büyücüdür. Büyücülük suçundan Brüksel'de bir yıl hapis yatmıştır. 3×3 , 4×4 , 5×5 , 6×6 , 7×7 , 8×8 ve 9×9 'lük sihirli karelerin, sırasıyla, Satürn'ü, Jüpiter'i, Mars'ı, Güneş'i, Venüs'ü, Merkür'ü ve Ay'ı simgelediklerini bulmuş ama öbür sihirli karelerin anlamlarını bulamamıştır!

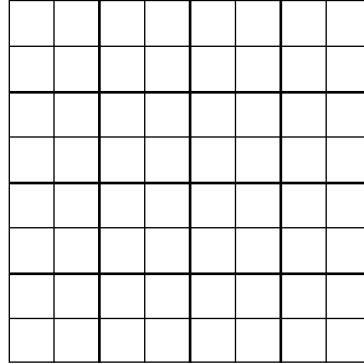
Bir başka Ortaçağ "bilim adamına" göre 2×2 'lik sihirli karelerin olmamasının nedeni çok daha basitmiş. Öyle bin dere-den su getirmeye gerek yokmuş... Bütün suç Adem'le Hav-

va'daymış. Adem'le Havva yüzünden 2×2 'lik sihirli kare yokmuş. Adem'le Havva ilk günahı işlemeselermiş 2×2 'lik sihirli kare bal gibi de olabilirmiş.

İnsanların sihirli karelerin tılsımına kendilerini kaptırmaları nedensiz değildir. Sihirli karelerin gerçekten sihirli bir yanı vardır. Sanki sayıların biz insanlardan bağımsız bir yaşamı varmış gibi bir duygu verir insana. Doğrusu da budur: Sayılar biz insanlardan bağımsızdır. Sayıları icat etmemiş, keşfetmişizdir, aynen Amerika'yı keşfettiğimiz gibi...

Çift kenarlı (boyutlu) sihirli kare yapmaya çalışacağız. Hemen daha başlangıçtan söyleyeyim: Çift boyutlu sihirli kareleri yapmak için genel bir yöntem vermeyeceğiz, çok karmaşık. Öte yandan 4, 8, 12, 16 gibi dörde bölünebilen kenarlı sihirli kare yapılabiliyor. Önce bu sihirli kareleri bulalım. 6, 10, 14, 18... kenarlı sihirli kareleri yazının sonuna bırakalım.

n , dörde bölünebilen bir sayı olsun. n 'yi dörde bölelim ve $n = 4m$ yazalım. Müstakbel sihirli karemizi 16 tane $m \times m$ 'lik küçük kareye bölelim. Örneğin $n = 8$ ise (yani $m = 2$ ise), karemizi 16 tane 2×2 'lik kareye bölelim:



Eğer $n = 12$ olsaydı, karemizi 16 tane 3×3 boyutlu küçük kareye bölecektik.

Şimdi her iki çaprazı da içeren $m \times m$ 'lik karelere bakalım. m kaç olursa olsun, bu karelerden 8 tane vardır. Yani 16 adet

$m \times m$ 'lik küçük karenin yarısı çaprazları içerir, öteki yarısı içermez. Bu kareleri kurşun kalemle boyayalım. $n = 8$ olduğunda durum şöyle:

Şimdi her kareye bir sayı koyacağız. En üst sol köşeden ve 1'den başlayarak kareleri sırayla numaralayalım. Ancak gri kareleri atlayalım, onları daha sonra numaralayacağız. $n = 8$ için elde ettiğimiz durumu gösterelim:

		3	4	5	6		
		11	12	13	14		
17	18					23	24
25	26					31	32
33	34					39	40
41	42					47	48
		51	52	53	54		
		59	60	61	62		

Şimdi sıra gri karelerde. Gri kareleri numaralamak için aynı şeyi yapacağız. Bu kez alt sağ köşeden başlayacağız ve beyaz kareleri atlayacağız. $n = 8$ iken gri karelerin numaraları şöyle olacak:

64	63					58	57
56	55					50	49
		46	45	44	43		
		38	37	36	35		
		30	29	28	27		
		22	21	20	19		
16	15					10	9
8	7					2	1

Yukardaki son iki şekli üstüste koyacak olursak birkaç sayfa önce verdiğimiz 8×8 'lik sihirli kareyi elde ederiz.

Bu yöntemle $4m \times 4m$ 'lik her sihirli kareyi bulabiliriz.

12×12 'lik sihirli kareyi de bulabiliriz. İşte bütün ihtişamıyla o sihirli kare:

1	2	3	4	140	141	142	143	9	10	11	12
13	14	15	16	128	127	126	125	21	22	23	24
25	26	27	28	116	115	114	113	33	34	35	36
37	38	39	40	104	103	102	101	45	46	47	48
96	95	94	93	53	54	55	56	88	87	86	85
84	83	82	81	65	66	67	68	76	75	74	73
72	71	70	69	77	78	79	80	64	63	62	61
60	59	58	57	89	90	91	92	52	51	50	49
97	98	99	100	44	43	42	41	105	106	107	108
109	110	111	112	32	31	30	29	117	118	119	120
121	122	123	124	20	19	18	17	129	130	131	132
133	134	135	136	8	7	6	5	141	142	143	144

Şimdi sıra dörde bölünemeyen çift boyutlu sihirli kare yapmaya geldi.

Önce 6×6 'lık sihirli kare yapmaya çalışalım.

Bir önceki yazımızda (sayfa 158) $n \times n$ 'lik bir sihirli karenin sihirli sayısının, yani ya bir sıranın ya bir sütunun ya da bir çap-

razın sayılarının toplamının $n(n^2+1)/2$ olduğunu görmüştük. Bu formülde $n = 6$ alırsak 111 buluruz. Demek ki 6×6 'lık bir sihirli karenin sihirli sayısı 111. Bu sayıyı aklımızın bir köşesine yazalım.

	16	2	3	13	
	5	11	10	8	
	9	7	6	12	
	4	14	15	1	

4×4 'lük bir sihirli kareyi, yandaki gibi, 6×6 'lık bir karenin tam ortasına oturtalım:

Şu anda sihirli sayımız 34 (ister topla-
layın ister yukardaki formülü $n = 4$ 'e
uygulayın.) 111'e daha çok var. Elde
etmek istediğimiz 111 sayısına yaklaş-

mak için yukardaki karenin sayılarına 10 ekleyin:

Sihirli sayımız 74 oldu (eskiden
34'tü, 40 daha ekledik.) Her ne kadar
111'e yaklaştıysak da daha 37 sayılık
eksiğimiz var. ($111 - 74 = 37$.) Ancak
daha tüm sayıları kullanmadık. Şimdi
sayısı olmayan karelere dahaca kullan-
madığımız sayıları yazacağız. Kullan-
madığımız sayıları önce sıralayalım:

	26	12	13	23	
	15	21	20	18	
	19	17	16	22	
	14	24	25	11	

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
36 35 34 33 32 31 30 29 28 27

Sayısız karelerimize bu sayılardan yerleştireceğiz. Sıralama-
ya dikkat edin. İkinci sıra tersten yazılmış ve altalta gelen sayı-
ların toplamı 37. Demek ki üst sıradaki küçük sayının yeri alt
sıradaki büyük sayının yerini belirleyecek.

Her kenarda 6 kare var. Bu 6 karenin yarısına üst sıradaki
küçük sayılardan, geri kalan yarısına da alt kattaki büyük sa-
yılardan koyacağız.

Önce çaprazların işini bitirelim. Üst iki köşe kareye dahaca
kullanmadığımız en küçük iki sayıyı, 1 ve 2 sayılarını koyalım.
Alt iki köşeye gelecek sayılar şimdi belli: 35 ve 36:

1	34	33	32	9	2
30	11	25	24	14	7
29	22	16	17	19	8
10	18	20	21	15	27
6	23	13	12	26	31
35	3	4	5	28	36

Böylece çaprazların toplamı 111 oldu. Bundan sonrası için bir kural olduğunu sanmıyorum. Çeşitli olasılıkları denemek gerekiyor. Ancak iki noktaya dikkat edelim: a) Her dört kenara üç büyük, üç küçük sayı koyacağız ve b) Karşılıklı sayıların toplamı 37 olacak. Elbet sihirli sayıyı da unutmayalım.

Alt sıraya daha hiç küçük sayı koymadık. Oysa üç küçük sayı koymamız gerekiyor. 3, 4 ve 5'i deneyelim. Bakalım olacak mı? Bu sayıların tepelerine 34, 33 ve 32 gelmek zorunda. Gelsinler. Sihirli karenin tamamlanmasına az kaldı. Sihirli sayı 111 olduğundan, alt ve üst kenarlara gelecek son sayılar da belli. Geriye sağ ve sol kenarlara gelecek sekiz sayıyı bulmak kalıyor. El yordamıyla bulunabiliyor bu sayılar. Ve işte 6×6 'lık sihirli kare aşağıda.

1	34	33	32	9	2
30	11	25	24	14	7
29	22	16	17	19	8
10	18	20	21	15	27
6	23	13	12	26	31
35	3	4	5	28	36

10×10 'luk sihirli kare yapmak için,

1) 8×8 'lik sihirli kareyi 10×10 'luk karenin tam ortasına, göbeğine koyun.

2) Ortadaki 8×8 'lik karenin her sayısına 18 ekleyin.

3) Dahaca koymadığınız

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
100 99 98 97 96 95 94 93 92 91 90 89 88 87 86 85 84 83

sayılarını yukardaki biçimde bir kenara yazın.

4) Şimdi bu sayıları boş kalan kenar karelere yerleştireceğiz. İlk olarak üst iki köşeye 1 ve 2 sayılarını, alt iki köşeye 100 ve 99 sayılarını yerleştirin.

5) Bundan sonrası için üç yardımcı kural var. Bu noktalardan yararlanarak 10×10 'luk sihirli kareyi tamamlamaya çalışın:

5a) Her kenara 5 büyük, 5 küçük sayı yazılacak.

5b) Karşılıklı kenara toplamı 101 olan sayılar gelecek.

5c) Sihirli sayımız 505.

İşte bu yolla yapılmış 10×10 'luk sihirli kare:

1	98	97	96	95	90	10	9	7	2
8	19	21	80	79	78	77	25	26	93
14	27	28	72	71	70	69	33	34	87
17	66	65	37	38	39	40	60	59	84
18	58	57	45	46	47	48	52	51	83
85	50	49	53	54	55	56	44	43	16
86	42	41	61	62	63	64	36	35	15
88	67	68	32	31	30	29	73	74	13
89	75	76	24	23	22	21	81	82	12
99	3	4	5	6	11	91	92	94	100

Genel yöntem aşağı yukarı belli olmuştur sanırım. Eğer $n = 4m + 2$, dörde bölünemeyen bir çift sayıysa, $n \times n$ boyutlu bir sihirli kare yapmak için:

1) $n \times n$ boyutlu karenin tam ortasına $4m \times 4m$ 'lik bir sihirli kare yerleştirin.

2) Bu sihirli karenin her sayısına $2n - 2$ ekleyin.

3) Dahaca kullanmadığınız sayıları iki sıra olarak yazın. Üste küçük sayıları küçükten büyüğe, alta büyük sayıları büyüktten küçüğe koyun. Böylece üstüste gelen sayıların toplamı $n^2 + 1$ olacaktır. Bu sayıları kenardaki boş karelere yerleştireceksiniz.

4) İlk olarak 1 ve 2 sayılarını üst kenar köşelerine yerleştirin. Alt köşelere $n^2 - 1$ ve n^2 sayıları gelecek.

5) Bundan sonrası için genel kuralı bilmiyorum. El yordamıyla bulunabilir ama. Aşağıdaki üç kurala uymaya çalışın:

5a) Her kenara $2m + 1$ tane büyük, $2m + 1$ tane de küçük sayı gelecek.

5b) Karşılıklı sayıların toplamı $n^2 + 1$ olacak.

5c) Sihirli sayı $n(n^2 + 1)/2$ olacak.