

## NİM

Doktora yaptığım okulun en büyük odası “toplumsal etkinliklere” ayrılmıştı. Bu odanın hemen yanında küçücük bir çay ocağı vardı. Matematikçiler çalışmaktan bunaldıklarında, sohbet etmek istediklerinde o odaya gelip dinlenirlerdi. Kimi bütün gününü o odada geçirirdi. Doktora tezlerini o odada yazanlar bile vardı. Oysa her öğrenciye ayrı bir çalışma odası verilmişti. Ama çay odasının ayrı bir havası, kendine özgü bir kokusu vardı; kitap, çay, kahve ve tebeşir tozu alaşımı, doyum olmaz bir koku...

Çay odasının başlıca iki etkinliği matematik ve oyundu. Dans partileri düzenlediğimiz, doğumgünlerini kutladığımız, bayramlarda yemek yediğimiz, içki içtiğimiz olurdu ama gene de bu etkinliklerin hiçbiri matematik ve oyun denli bu odanın karakterini belirlememiş, havasına yerleşmemişti. Araştırma konularında ilginç ya da zor problemlerle karşılaşan öğrenciler problemlerini öbür matematikçilere anlatırlar, onlara danışırlardı. Duvarı boydan boya kaplayan 5-6 metre genişliğinde kocaman bir karatahta vardı. O karatahtada onu aşkın matematikçinin çalıştığı olurdu. Kimi zaman aynı problem üzerine... Kimileyin, bir matematikçi ilgisini çeken bir bilimsel yazıyı öbürlerine anlatırdı. Okula yeni girmiş doktora öğrencileri bi-

tirmek üzere olanlara sorular sorarlardı. Ya da bir profesörün dersi tartışılır, zor bölümler aydınlığa kavuşurdu. Haftada bir gece de o odada aramızdan biri araştırma konusunu anlatırdı.

Sanırım biz öğrenciler öğrendiklerimizin çoğunu o odada öğrendik.

Hergün akşamüstü saat dörtte o odada çay, kahve ve kek verilirdi. İşte o zaman odanın keyfine doyum olmazdı. Elliye yakın öğrenci ve hoca odaya doluşurdu. Büyük matematikçilerin çay içişlerini, kek yiyişlerini seyrederdik. Nedense onların çayları ve kekleri bizimkilerden çok daha lezzetliymiş gibi gelirdi bize.

Odanın ikinci önemli etkinliği oyundu. Aslında matematikle oyunu birbirinden ayırmak pek doğru değil ya... Matematikçilerin büyük çoğunluğu oyunbazdır, hiç oyun oynamayanların bile araştırmalarına yaklaşımı bir oyuncunun oyuna yaklaşımından pek farklı değildir çoğu zaman. Her türden oyun oynardı o odada: satranç, briç, tavlâ, go, poker (geceleri ve gizli gizli, ama az parasına, zaten paramız mı vardı!) sık oynadığımız klasik oyunlardı. Bu oyunların dışında az bilinen ilginç oyunlar da oynardık. Örneğin “negatif satranç”.

Negatif satrançta kaybeden kazanır, kazanan kaybeder. Almak zorunlu, şah alındığında oyun bitmez (dolayısıyla şah çekildiğinde “şah” demenin anlamı ve gereği yok) ve hiç askeri kalmayan oyuncu oyunu kazanır.

Oynadığımız bu tür oyunlarda amacımız oyun oynamak değildi. Gerçek amacımız oyunun çözümlemesini (analizini) yapmak, hangi oyuncunun kazanacağını, yani hangi oyuncunun *kazanan stratejisinin* olduğunu, bunu bulamasak bile en iyi oyun stratejisini bulmaktı. Örneğin, negatif satrançta, beyazın, şimdi anımsayamadığım<sup>1</sup> bir hamleyle oyuna başladığında, oyunu kaybedeceğini aşağı yukarı kanıtlamıştık (siyah akıllıca oynarsa elbet.)

---

1 Bu hamle d2-d4 müydü bu hamle acaba?

*Kazanan strateji* nedir? Örneğin *Matematik ve Korku* başlıklı yazıdaki birinci oyunda (sayfa 100-101), birinci oyuncunun kazanan stratejisi vardır. İkinci oyuncu ne oynarsa oynasın, birinci oyuncuyu kazandıran bir oyun vardır. (Birinci oyuncunun hamleleri ikinci oyuncunun hamlelerine göre değişir elbet.)

Sonlu ve saklı bilgisi olmayan oyunlara değgin bildiğimiz bir teorem vardı. Bu teoremi açıklamadan önce teoremden kullanacağımız terimleri açıklayayım.

Eğer bir oyun her zaman sonlu sayıda hamlede bitiyorsa ve oyunun her evresinde, hamle sırası gelen oyuncunun sonlu tane hamle seçeneği varsa, o oyuna *sonlu oyun* denir. Örneğin satranç sonlu bir oyundur. Çünkü satrancın her anında her oyuncunun sonlu tane seçeneği vardır ve her satranç oyunu ya iki oyuncudan birinin yengisiyle ya da beraberlikle biter<sup>2</sup>. Pişti, poker gibi kâğıt oyunları biter, yani sonlu oyunlardır. Öte yandan tavla sonlu bir oyun değildir, her iki oyuncunun da birer kırığı olabilir ve -kuramsal olarak, uygulamada olmasa bile- sonsuza değin gele atabilirler<sup>3</sup>.

Eğer bir oyunda, her oyuncu kendisinin ve öbür oyuncunun gelecekte yapabileceği (ve yapamayacağı) bütün hamleleri bilebiliyorsa, o oyunun *saklı bilgisi* olmadığı söylenir. Satrançta saklı bilgi yoktur. Öte yandan tavlada saklı bilgi vardır. Atılacak zarı iki oyuncu da bilmez. Pokerde, piştide ve briçte de saklı bilgi vardır, öbür oyuncunun elindeki kâğıtları bilemeyiz.

Şimdi bildiğimiz teoremi yazabiliriz:

---

2 Satrancın sonlu hamlede bitmesi için şu iki kural konulmuştur: 1) Şimdi anımsayamadığım belli bir sayıda hamle boyunca en az bir piyon yerinden kımıldamazsa oyun berabere biter, 2) Bir piyon gidebildiği en son kareye geldiğinde ya ata ya file ya kaleye ya da vezire dönüşür.

3 Tavlaya “yirmi el boyunca iki oyuncu da gele atarsa oyun berabere biter” diye bir kural getirilse bile, tavla sonlu bir oyun olmayabilir. Bu konu *Matematik ve Oyun* kitabımdaki *Tavla Üzerine Bir Soru* adlı yazıda ele alınmıştır. (Bkz. *Matematik ve Oyun*, Nesin Yayıncılık 2008.)

**Teorem 1.** *Eğer iki kişi arasında oynanan bir oyun sonluy-  
sa ve oyunun saklı bilgisi yoksa ve oyun beraberliğe izin vermi-  
yorsa, iki oyuncudan birinin kazanan stratejisi vardır<sup>4</sup>.*

Satrançta beraberlik olduğundan, satranca bu teoremi uy-  
gulayamayız. Öte yandan, beraberlik durumunda siyahın ka-  
zandığını varsayacak olursak, Teorem 1'den şu sonuç çıkar:

**Teorem 1'in Bir Sonucu.** *Satrançta ya beyazın kazandığı ya  
da siyahın en az berabere kalabildiği bir strateji vardır.*

Beyazın mı yoksa siyahın mı böyle bir stratejisi olduğu bi-  
linmiyor. Satranç öylesine karmaşık bir oyun ki bu varolduğu  
bilinen strateji bilgisayarlar yardımıyla bile bulunamıyor.

Bu teoremin kanıtı pek zor değildir. Yazının sonunda kanıt-  
tını bulabilirsiniz.

Bildiğimiz ikinci bir teorem daha vardı. Satrançta siyahlar  
beyaz askerlerle oynayamazlar. Beyazlar da siyah askerlere do-  
kunamazlar. Yani satrançta bir oyuncunun yapabileceği, öbür  
oyuncunun (sıra kendisinde olsaydı) yapamayacağı hamleler  
vardır. Bir oyuncu için yasal olup da öbür oyuncu için yasal ol-  
mayan hamlelerin olmadığı oyunlara *tarafsız oyun* denir. Ör-  
neğin üç taş oyunu tarafsız bir oyundur.

Sonlu, tarafsız, beraberlikle bitmeyen ve saklı bilgisi olma-  
yan oyunlara *güzel oyun* diyelim. Artık bildiğimiz teoremi  
açıklayabiliriz:

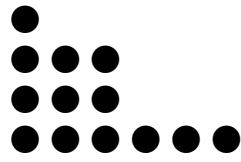
**Teorem 2.** *Her güzel oyun bir NİM oyununa eşdeğerdir<sup>5</sup>.*

---

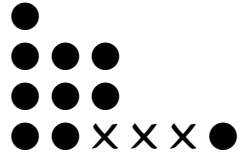
4 Bu teoremi bu yazının sonunda kanıtlayacağız.

5 Bu teoremin kanıtını bugün de bilmiyorum. Ama biz teoremin doğru olduğun-  
u sanıyorduk.

NİM oyunlarının ne olduğunu birazdan anlatacağım, ama önce “eşdeğer” teriminin anlamını açıklayayım. İkinci teoreme göre, bir “güzel oyun”da kazanan stratejisi olan oyuncuyu bulmak, bir NİM oyununda kazanan stratejisi olan oyuncuyu bulmak kadar zordur. Yani  $G$  bir güzel oyunsa, öyle bir NİM (oyunu) vardır ki, bu NİM’de kazanan strateji bulunduğu,  $G$  oyununun da kazanan stratejisi bulunur.

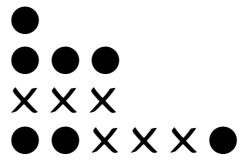


NİM oyunlarının tanımını bir örnekle verelim. İlk örneğimiz  $(1,0,2,0,0,1)$ ’lik NİM oyunu. Bu oyunu oynamak için bir kâğıt parçasına yandaki şekli çizin.



Her oyuncu sırası geldiğinde aynı sıradan ardarda gelen noktaları silebilir. Örneğin birinci oyuncu son sıranın sağdan ikinci, üçüncü ve dördüncü noktalarını silebilir. Oyun o zaman yandaki durumu alır.

Şimdi sıra ikinci oyuncuda. İkinci oyuncu son sıranın soldan ikinci ve altıncı noktalarını bir çırpıda silemez. Çünkü bu noktalar artık ardarda gelmiyor, aradaki noktalar silinmiş. Aynı nedenden ikinci sıranın birinci ve üçüncü noktalarını da silemez. Ama ikinci sırayı tümünden silebilir. Ya da ikinci sıranın sağındaki iki noktayı silebilir. Hiç nokta silmemezlik edemez, her oyuncu en az bir nokta silmeli (yoksa oyun sonlu olmazdı!) Diyelim ikinci oyuncu alttan ikinci sırayı tümüyle sildi. Oyun yandaki duruma gelir.



Şimdi sıra gene birinci oyuncuda...

En son hamleyi yapan, yani en son noktayı silen oyuncu oyunu kaybeder.

Yukardaki NİM oyununa  $(1, 0, 2, 0, 0, 1)$ ’lik NİM oyunu demiştik, çünkü bu NİM oyununa

1 tane 1 noktalık sıra  
 0 tane 2 noktalık sıra  
 2 tane 3 noktalık sıra  
 0 tane 4 noktalık sıra  
 0 tane 5 noktalık sıra  
 1 tane 6 noktalık sıra

ile başladık.

Örneğin (3, 2, 0, 0, 1, 2)'lik NİM yan-  
 daki gibi başlar.

Görüldüğü gibi her NİM oyunu her  
 hamleden sonra bir başka NİM oyununa  
 dönüşüyor. Yukarda, örnek olarak sundu-  
 ğumuz (1, 0, 2, 0, 0, 1)'lik NİM, birinci  
 oyuncunun ilk hamlesinden sonra  
 (2,1,2)'lik NİM'e dönüşmüş. İkinci oyun-  
 cunun hamlesinden sonraysa (2,1,1)'lik  
 NİM'e dönüşmüş. Bu, genel olarak her oyun için geçerlidir. Her  
 oyun, her hamleden sonra bir başka oyuna dönüşür.

NİM oyunlarının çözümlenmesi pek kolay değildir. Ancak  
 bazı kolay NİM'lerin analizini yapabiliriz.

( $n$ )'lik bir NİM'i ele alalım. Bu oyunda  $n$  tane bir noktalı sı-  
 ra vardır ve bu oyunu oynamak için zekâyâ gerek yoktur. Her  
 oyuncunun ancak bir hamlesi vardır: bir noktayı (ya da bir sı-  
 rayı, aynı şey) silmek. Eğer  $n$  çiftse birinci oyuncu, tekse ikinci  
 oyuncu kazanır elbette. Bunu cebirsel olarak şöyle gösterelim:

$$K(2n) = 1 \text{ ve } K(2n+1) = 0.$$

Bu, şu demektir: ( $2n$ )'lik NİM'leri birinci oyuncu,  
 ( $2n+1$ )'lik NİM'leri ikinci oyuncu kazanır.

Şimdi ( $n, m$ )'lik NİM'lere bakalım. Bu oyunları kim kaza-  
 nır? Daha doğrusu kimin kazanan stratejisi vardır? Bu oyunlar-  
 da  $n$  tane 1 noktalı sıra ve  $m$  tane 2 noktalı sıra var. Yani ol-  
 dukça kolay bir oyun. Ama herhangi bir NİM oyunu, oyunun  
 bir aşamasında ( $n, m$ )'lik bir NİM oyununa dönüşebilir. Bu ne-

denden dolayı  $(n, m)$ 'lik NİM'leri hangi oyuncunun kazanacağını bilmek önemlidir.

Eğer  $m = 0$  ise, yani hiç iki noktalı sıra yoksa, bu aslında  $(n)$ 'lik bir NİM'dir ve bu oyunların çözümlemesini yukarıda yapmıştık.

Şimdi de  $(n, 1)$ 'lik NİM'lere bakalım.  $n$  tane 1 noktalı sıra ve bir tane 2 noktalı sıra var. Bu durumda ilk oynayan kazanır. Neden? Şu nedenden: İlk oynayan oyuncu, ikilik sıradan bir ya da iki nokta silerek oyunu ister  $(n+1)$ 'lik, ister  $(n)$ 'lik NİM'e dönüştürebilir. Hangisini yapmalı? Eğer  $n$  çiftse, ikilik sıradan bir nokta silip oyunu  $(n+1)$ 'lik NİM'e dönüştürür.  $n+1$  tek olduğundan, bu durumda oyunu kazanır. Eğer  $n$  tekse, ikilik sırayı tümüyle silip ortadan kaldırmalı. Böylece oyun  $(n)$ 'lik NİM'e dönüşür.  $n$  tek olduğundan gene oyunu kazanır.

Örneğin  $(5, 1)$ 'lik NİM'de ikilik sıra tümüyle silinmeli. Öte yandan  $(6, 1)$ 'lik NİM'de ikilik sıranın yalnızca bir noktası silinmeli.

Böylece,

$$K(n, 1) = 1 \quad (1)$$

eşitliğini bulmuş olduk. Daha önce de

$$K(2n, 0) = 1 \quad (2)$$

ve

$$K(2n+1, 0) = 0 \quad (3)$$

eşitliklerini bulmuştuk.

Şu teoremi kanıtlayacağız:

**Teorem 3.**  $m > 0$  olsun.

a) Eğer  $n$  ve  $m$  çiftse  $K(n, m) = 0$ 'dir.

b) Eğer  $n$  ve  $m$ 'den en az biri tekse  $K(n, m) = 1$ 'dir.

Teoreme göre  $n$  ve  $m$  çiftse ( $m > 0$ ), ikinci oyuncunun kazanan stratejisi vardır. Eğer  $n$  ve  $m$  sayılarından en az biri tekse, birinci oyuncunun kazanan bir stratejisi vardır. Yani  $K(n, m)$

sayısı  $n+m$  sayısının tekliğine ve çiftliğine göre değişir.

Görüldüğü gibi  $n$  ve  $m$  sayıları rastgele seçilirse, birinci oyuncu daha sık kazanacak.

**Teorem 3'ün Kanıtı:**  $m > 0$  olsun.  $(n, m)$ 'lik bir NİM'de hamle seçenekleri nelerdir? Sırası gelen oyuncunun üç seçeneği vardır:

1) Eğer bir noktalık bir sıra varsa, yani  $n > 0$  ise, sırası gelen oyuncu o bir noktalık sırayı silerek, oyunu  $(n-1, m)$ 'lik NİM'e dönüştürebilir.

2) Sırası gelen oyuncu iki noktalık bir sırayı silerek, oyunu  $(n, m-1)$ 'lik NİM'e dönüştürebilir.

3) Sırası gelen oyuncu iki noktalık bir sıradan bir nokta silerek oyunu  $(n+1, m-1)$ 'lik NİM'e dönüştürebilir.

Eğer bu üç oyundan birinde ikinci oyuncu kazanıyorsa ilk hamleyi yapan oyunu kazanır. Bu dediğimi şöyle açıklamaya çalışayım. Birinci oyuncuya  $A$  diyelim, ikinci oyuncuya da  $B$ . Sıra  $A$ 'da. Diyelim  $A$ , NİM oyununu ikinci oyuncunun kazanabileceği bir duruma getirdi. Bu yeni oyuna  $B$  başlayacağından, bu yeni oyunda ikinci oyuncu  $A$ 'dır. Demek ki  $A$ 'nın  $B$ 'ye oynasın diye bıraktığı oyunu  $A$  kazanır.

Öte yandan bu üç oyunu da birinci oyuncu kazanıyorsa, ilk hamleyi yapan kaybeder. Çünkü ilk hamleyi yapan oyuncu, yani  $A$ , öbürüne kazanabileceği bir oyun bırakacaktır, başka seçeneği yoktur.

Yani  $K(n-1, m) = 0$  ise, ya da  $K(n, m-1) = 0$  ise, ya da  $K(n+1, m-1) = 0$  ise,  $(n, m)$ 'lik NİM'i oyuna ilk başlayan oyuncu kazanır: Yukardaki üç sayıdan hangisi 0 ise, birinci oyuncu oyunu o oyuna dönüştürür. Öte yandan bu üç sayıdan birinin 0 olması demek, bu üç sayının çarpımının 0 olması demektir. Bu üç sayıdan hiçbiri sıfır değilse, birinci oyuncunun yapabileceği pek bir şeyi yok demektir. İkinci oyuncu oyunu kazanır. Birinci oyuncunun yapabileceği tek şey, ikinci oyuncunun hata yapaca-



ğını umarak, oyunu çözümlemesi zor bir duruma sokmalıdır.

Bu üç sayıdan hiçbirinin sıfır olmaması demek, yani hepsinin 1 olması demek, bu üç sayının çarpımının 1 olması demektir.

Ne bulduk? Şunu bulduk:

Eğer  $K(n-1,m)K(n,m-1)K(n+1,m-1) = 1$  ise,  $K(n,m) = 0$ 'dır.

Eğer  $K(n-1,m)K(n,m-1)K(n+1,m-1) = 0$  ise,  $K(n,m) = 1$ 'dir.

Burada küçük bir teorem kanıtladık:

$$K(n, m) = 1 - K(n-1, m)K(n, m-1)K(n+1, m-1) \quad (4)$$

Ancak bu eşitlikte  $n > 0$  varsaydığımızı unutmayalım.  $n = 0$  ise, yukardaki formülü uygulayamayız, çünkü  $(-1, m)$ 'lik NİM yok. Olmasın! Biz de

$$K(-1, m) = 1 \quad (5)$$

olarak tanımlarız. Böylece (4) eşitliği bir anlam kazanır ve iyi bir anlam kazanır, yani formül  $n = 0$  iken de doğrudur.

(1, 2, 3, 4, 5) formüllerini kullanarak  $K(n, m)$ 'yi hesaplayabiliriz:

$$K(0,2) = 1 - K(-1,2)K(0,1)K(1,1) = 1 - 1 \times 1 \times 1 = 0$$

$$K(1,2) = 1 - K(0,2)K(1,1)K(2,1) = 1 - 0 \times 1 \times 1 = 1$$

$$K(2,2) = 1 - K(1,2)K(2,1)K(3,1) = 1 - 1 \times 1 \times 1 = 0$$

$$K(3,2) = 1 - K(2,2)K(3,1)K(4,1) = 1 - 0 \times 1 \times 1 = 1$$

$$K(4,2) = 1 - K(3,2)K(4,1)K(5,1) = 1 - 1 \times 1 \times 1 = 0 \dots$$

Bu değerleri bulmak için bir önce bulduğumuz değerleri kullandık. Örneğin,  $K(4, 2)$ 'yi bulmak için  $K(3, 2)$ 'yi,  $K(3, 2)$ 'yi bulmak için  $K(2, 2)$ 'yi kullandık. Bu değerlere dikkatle bakıldığında,  $n$  çiftse  $K(n, 2) = 0$ , tekse  $K(n, 2) = 1$  olduğu anlaşılır. Bu, tümevarımla kolaylıkla kanıtlanabilir. Bu da kanıtlamak istediğimiz ve kanıtlamak üzere olduğumuz teoremle uyumlu.

Şimdi  $K(n,3)$ 'ü hesaplayalım. Teoreme göre sonuç hep 1 çıkmalı. Bakalım: (4) formülüne göre,

$$K(n, 3) = 1 - K(n-1, 3)K(n, 2)K(n+1, 2).$$

Burada ya  $n$  ya da  $n+1$  çift sayıdır. Demek ki ya  $K(n, 2)$  ya da  $K(n+1, 2)$  sıfırdır. Dolayısıyla  $K(n, 3) = 1$ 'dir.

Sıra  $K(n, 4)$ 'ün hesaplanmasında. (4) formülünü uygulayalım:

$$K(n, 4) = 1 - K(n-1, 4)K(n, 3)K(n+1, 3).$$

Öte yandan

$$K(n, 3) = K(n+1, 3) = 1$$

eşitliklerini biliyoruz. Demek ki,

$$K(n, 4) = 1 - K(n-1, 4).$$

Bu son eşitliğe göre

$$K(n-1, 4) = 1 \text{ ise, } K(n, 4) = 0 \text{ 'dır.}$$

$$K(n-1, 4) = 0 \text{ ise, } K(n, 4) = 1 \text{ 'dir.}$$

Ama  $K(-1, 4) = 0$  olduğundan, eğer  $n$  çiftse,  $K(n, 4) = 0$  'dır, eğer  $n$  tekse,  $K(n, 4) = 1$  'dir. Bu sonuç da teoremimizle uyumlu.

Bundan sonrasını okur tümevarımla kanıtlayabilir.

Hangi  $(n, m)$ 'lik NİM'leri kazanacağımızı gösterdik göstermesine ama kazanacağımız oyunları nasıl kazanacağımızı kolayca anlaşılır bir biçimde söylemedik. Diyelim hamle sırası bizde ve öbür oyuncu önümüze  $(n, m)$ 'lik bir oyun sundu:

1) Eğer  $m = 0$  ise, ne yapılacağı belli. Bir noktalık bir sırayı sileceksiniz. Eğer  $n$  tek ise kaybedeceksiniz,  $m$  çift ise kazanacaksınız.

2) Eğer  $m = 1$  ise, iki noktalı sıradan oynayacaksınız. O sıranın ya bir noktasını ya da iki noktasını birden sileceksiniz. Bunu öyle yapacaksınız ki, geriye kalan noktaların sayısı tek olsun. Demek ki eğer  $n$  çiftse ikili sıradan bir nokta sileceksiniz, eğer  $n$  tekse ikili sırayı olduğu gibi sileceksiniz. Bundan böyle  $m > 1$  olduğunu varsayalım.

3) Eğer  $n$  çift,  $m$  tekse, iki noktalı bir sırayı silin. Böylece oyun  $(n, m-1)$ 'lik bir NİM'e dönüşür.

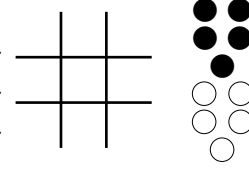
4) Eğer  $n$  tek,  $m$  çiftse, bir noktalı bir sırayı silin. Böylece oyun  $(n-1, m)$ 'lik NİM'e dönüşür.

5) Eğer hem  $n$ , hem de  $m$  çiftse, ne yaparsanız yapın, öbür oyuncu iyi oynadığında kazanamazsınız. Bir hata yapmasını beklemeniz gerekmektedir. Hata yapma olasılığını arttırmak için oyunu fazla kolaylaştırmayın, tek noktalı bir sırayı silin<sup>5</sup>.

**Birinci Teoremin Kanıtı:** Söz verdiğimiz gibi birinci teoremi kanıtlayacağız. Sonlu bir oyunumuz var. Diyelim  $O$  oyunu.

A sonlu olduğundan, öyle bir  $n$  sayısı vardır ki, en fazla  $n$  hamlede oyun biter. Bu sayıların en küçüğüne  $O$  oyununun uzunluğu adını verelim. Yani  $O$  oyununun uzunluğu en uzun süren  $O$  oyununun hamle sayısı. Örneğin üç taş oyununun uzunluğu 9'dur.

Çünkü üç taş oyunu en fazla 9 hamle sonra biter ve gerçekten de 9 hamle süren oyunlar olur. Yani üç taş oyunlarında en uzun oyun 9 hamledir.



Teoremimizi tümevarımla kanıtlayacağız. Ne üzerine tümevarımla?  $O$  oyununun uzunluğu üzerine tümevarımla.

Uzunluğu 0 olan oyunlar zaten bitmiş oyunlardır. Ya birinci oyuncu kazanmıştır ya da ikinci. Eğer birinci oyuncu kazanmışsa, birinci oyuncunun kazanan stratejisi vardır. Eğer ikinci oyuncu kazanmışsa, ikinci oyuncunun kazanan stratejisi vardır. Kazanan stratejisi olan oyuncu kılını kıpırdatmadan kazanır.

Şimdi oyunumuzun uzunluğu 0'dan büyük olsun. Bu uzunluğa  $n$  diyelim. Tümevarım varsayımıyla, teoremimizin, uzunluğu  $n$ 'den küçük olan oyunlar için doğru olduğunu biliyoruz.

Anlatımda kolaylık sağlaması için oyunda ilk hamleyi bizim yapacağımızı varsayacağız. Kendimize  $A$  diyeceğiz, öbür oyuncuya  $B$ .

Her oyun gibi oyunumuz da bir hamleden sonra bir başka oyuna dönüşür, üstelik uzunluğu daha kısa olan bir oyuna. İlk hamle için  $k$  tane seçeneğimizin olduğunu varsayalım. Demek ki

---

5 Bu yazıyı yazdıktan çok sonra Kaynakça [7]'ye baktığımda, Teorem 2'nin doğru olduğu NİM oyunlarının burda anlattığımdan değişik olduklarını gördüm. Kaynakça [3]'teki NİM oyunları bu yazıdaki NİM oyunlarından daha basit ve o oyunları hangi oyuncunun nasıl oynayarak kazanacağı biliniyor. O NİM oyunlarını bu kitabın bir sonraki basımına alacağım.. NİM oyunları ve başka oyunlar üzerine Kaynakça [3]'te çok daha fazla bilgi bulabilirsiniz.

$O$  oyununda ilk hamleyi yaptığımızda kendimizi  $k$  oyundan birinde buluruz. Bu oyunlara  $O_1, \dots, O_k$  diyelim. Bir hamle yapıldığından, elde edilen bu  $k$  oyunun her birinin uzunluğu en fazla  $n - 1$ 'dir. Dikkat edilmesi gereken bir nokta var, o da şu: bu  $k$  oyundan her birine öbür oyuncu, yani  $B$  başlayacak. Eğer bu  $k$  oyundan birinde ikinci oyuncunun kazanan stratejisi varsa o oyunu üreten hamleyi yaparız. Böylece  $B$  oyunu kazanamaz ve kazanan bir stratejimiz olur. Eğer böyle bir hamle yoksa, yani türeyen  $k$  oyunun herbirinde birinci oyuncu kazanıyorsa, kazanan stratejimizi yoktur,  $B$ 'nin vardır. Teorem kanıtlanmıştır.