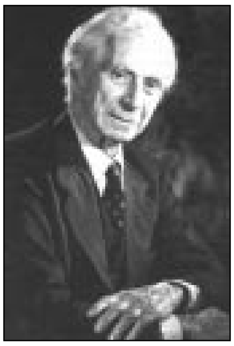
Bertrand Russell'ın Paradoksu

1. **Yamyam Paradoksu (Çatışkısı):** Bilinen bilmecedir. Yamyamlar bir mantıkçı yakalarlar ve şöyle derler mantıkçıya:

– Biz her yakaladığımız yabancıyı yeriz. Kimini haşlayıp, kimini kızartıp yeriz. Avımıza bir soru sorarız. Avımız soruyu doğru yanıtlarsa haşlarız, yanlış yanıtlarsa kızartırız.

Dedikleri gibi de yaparlar. Mantıkçıya bir soru sorarlar. Mantıkçı bir süre düşündükten sonra soruyu yanıtlar. Yanıtı duyan yamyamlar ne yapacaklarını şaşırırlar. Yanıt öylesine akıllı bir yanıttır ki, yamyamlar mantıkçıyı ne haşlayabilirler ne de kızartabilirler. Yamyamlar mantıkçıya ne sormuşlardır ve mantıkçı soruyu nasıl yanıtlamıştır?


Bertrand Russell

Okur düşünedururken biz yanıtı verelim. Yamyamlar mantıkçıya şu soruyu sormuşlardır:

– Seni haşlayıp da mı yiyeceğiz, yoksa kızartıp da mı yiyeceğiz?

Mantıkçı şöyle yanıtlamıştır:

– Kızartacaksınız!

Bu soru ve yanıtla, mantıkçı ne haşlanır, ne de kızartılır.

Bir an, mantıkçının kızartılacağını varsayalım. O zaman mantıkçının yanıtı doğru olur. Ama yanıt doğru olduğundan -yamyamların kendi kurallarına göre- mantıkçının haşlanması gerekmektedir. Demek mantıkçı kızartılamaz.

Şimdi de mantıkçının haşlanacağını varsayalım. O zaman mantıkçının yanıtı yanlış olacak. Yanıt yanlış olduğundan da kızartılması gerekmektedir. Demek mantıkçı haşlanamaz.

Yamyamlar tam bir kısır döngüye girmişlerdir. Kızartsalar haşlamaları gerekecek, haşlasalar kızartmaları!

Sonuç olarak mantıkçı kurtulur.[1]

Bu gibi durumlar "paradoksal" olarak nitelendirilir. "Saçma" bir durumdur. Çünkü mantıkçı ya kızartılacaktır ya da haşlanacaktır; bunu önceden biliyoruz. Dolayısıyla yamyamların sorduğu soruya yanıt olarak iki seçenek vardır. Ve böyle bir sorunun yanıtı ya doğru ya da yanlış olmalıdır. Oysa yukardaki sorunun yanıtı ne doğru, ne de yanlıştır; daha doğrusu yanıt doğruysa yanlış, yanlışsa doğrudur. Yani yanıtın doğruluğu ya da yanlışlığı yanıtın yanlışlığı ya da doğruluğuna bağlıdır!

Yukardaki paradoks nasıl çözülür, yani çelişki nasıl giderilir? Şöyle: öyküde anlatıldığı gibi bir boy yoktur. Yani, yakaladıkları her yabancıyı yiyen ve yukardaki yöntemle yiyen bir boy yoktur.

Bu çözüme kimi okur karşı çıkabilir. Matematikçileri elindeki oyuncağı sevmeyip kıran, bilmecesini çözemeyip yırtan mızıkçı çocuklara benzetebilir. Ama bu matematikçilere haksızlık olur. Şöyle düşünelim: Bilmecede şu ve şu özelliklere sahip bir boy vardır diyoruz. Öyle bir boyun olabileceğinden ilk başta kuşku duymayabiliriz, ancak görüyoruz ki böyle bir boyun varlığı bizi çelişkiye götürüyor.

---

1 Eğer mantıkçı, "haşlayacaksınız," diye yanıtlasaydı, yamyamlar mantıkçıyı istedikleri gibi yiyebilirlerdi, ister haşlar, ister kızartırlardı ve bir çelişki doğmazdı.

2. Berber Paradoksu: Yukardaki paradoksa benzer paradoks çoktur. İşte bir tane daha:

Köyün birinde bir berber varmış. Bu berber, o köyde kendini traş etmeyen herkesi traş edermiş, kendini traş edenleriyse traş etmezmiş. Soru şu: bu berber kendini traş eder mi, etmez mi? Kendini traş etmezse, kendini traş etmeyen herkesi traş ettiğinden, kendini traş etmeli. Kendini traş ederse, kendini traş edenleri traş etmediğinden, kendini traş etmemeli.

Çözüm yukardaki gibi: böyle bir berber olamaz.

3. Kataloglar Paradoksu: Bu yüzyılın başında matematikçileri derin düşüncelere düşüren paradoksa geçmeden önce, günlük dilimizi kullanarak bir paradoks daha geçelim:

Baskı makinasının bulunuşundan sonra kitap sayısı çoğaldı doğal olarak. İlk kez ne zaman kataloglara gereksinildiğini bilmiyorum, ama bir gün gereksinildi. Kitaplar çoğalınca, kataloglar da çoğaldı. Kataloglar çoğalınca katalogların da katalogları yapılmaya başlandı.

Bazı kataloglar kendi adlarını listelerine (listelerine) almıyorlardı, bazı kataloglarsa alıyorlardı (katalog da bir kitap değil midir!) Bir yayıncının aklına "kendi adını içermeyen kataloglar katalogu" yapmak gelir.

Bir sorun çıkar ortaya. Bu hazırlanmakta olan katalog kendi adını içermeli midir, içermemeli midir? Kendi adını içerirse, katalogun türünden dolayı, adını içermemesi gerekmektedir. Kendi adını içermezse de, yine katalogun türünden dolayı, kendi adını içermesi gerekmektedir.

Bir paradoks daha! Nasıl çözeceğiz? Hazırlanması bitmemiş bir katalogun katalog sayılamayacağını önermek bir çözüm müdür? Değildir (ama çözüme yaklaşır), çünkü hazırlanmakta olan katalogun adını "kendi adını içermeyen, yayımlanmış ya da hazırlanmakta olan kataloglar katalogu" diye değiştirirsek paradoks ortadan kalkmış olmaz.

Biz şu çözümü önereceğiz: böyle bir katalog yapılamaz. Yukardaki çozümlerde de olduğu gibi tanımlanan nesnenin olamayacağını öne sürdük.[2]

4. Giritli Epimenides. İÖ 6'ncı yüzyılda yaşamış Giritli filozof Epimenides'in, "Bütün Gritliler yalancıdır," sözleri ünlüdür. Epimenides doğru mu konuşur, yalan mı?

Epimenides'in paradoksu, Epimenides'in olmadığı öne sürülerek çözülemez elbet! Bu paradoks iki varsayımdan kaynaklanmaktadır: a) Her insan ya yalancıdır ya değildir, ve b) Yalancılar her zaman yalan söylerler, yalancı olmayanlar hep doğruyu söylerler. Bu varsayımlarımız yanlış. Çünkü bu varsayımlara göre Epimenides ne yalancı olabilir, ne de olmayabilir. Bir kez daha çözdük paradoksu.

5. Yukardaki Paradoksların Ortak Yönü.[3] Yukardaki paradoksların her birinde özne kendinden sözediyordu. Birinci paradoksta, mantıkçı kızartılacağını ileri sürüyordu. İkinci paradokstaki berber, tüm köylülerle, dolayısıyla kendisiyle de, ilgili bir sav ortaya atıyordu. Üçüncü paradokstaki katalog tüm kataloglarla, dolayısıyla kendisiyle de ilgili. Dördüncü paradokstaki Giritli Epimenides ise tüm Giritlilerle, dolayısıyla kendisiyle de, ilgili bir tümce söylüyor.

6. Daha ciddi bir paradoks. Giritli Epimenides'in paradoksuna çok benzer bir paradoks daha vardır. "Bu tümce yanlıştır" tümcesini ele alalım. Tümce kendinden sözediyor ve çelişki yaratıyor. Çünkü, "Bu tümce yanlıştır" tümcesi yanlış olsa, doğru olacak; öte yandan, doğru olsa yanlış olacak...

Bu paradoksu "böyle bir tümce yoktur" diyerek çözümleyemeyiz. Tümce ortada! Ne yapmalıyız? Konumuz felsefe değil ve

---

2 Dünyanın En Güzel Katalogları adında bir katalog var! ABD'de çıkan bu katalogun varlığını Prof. Dr. Nazif Tepedelenlioğlu'ndan öğrendim.

3 Yukardaki paradoksların benzerlerini Kaynakça [17]'de bulabilirsiniz.

bu paradoksun yarattığı felsefi sorunları filozoflara bırakalım. Konumuz matematik ve görüldüğü gibi eğer "bu tümce yanlıştır" tümcesine benzer bir tümce matematiksel dilde yazılabilirse matematiğin çelişkili olduğu ortaya çıkardı. Ne mutlu matematikçilere ki günümüzde çoğunluk tarafından kabul edilen matematikte, "bu tümce yanlıştır" tümcesine benzer bir tümcenin yazılamayacağı Polonyalı matematikçi Alfred Tarski tarafından kanıtlanmıştır. Bunun için Kaynakça [25], s.41'e bakınız. Bundan matematiğin çelişkisiz olduğu çıkmaz elbet, yalnızca buna benzer bir çelişkiye matematikte rastlanmadığı anlaşılır.

Son yıllarda ortaya çıkan ***puslu mantık***ta her önerme doğru ya da yanlış olmak zorunda değildir. Puslu mantığa göre yüzde 50, yüzde 60 gibi doğruluk değerleri olan önermeler de vardır. Örneğin, yukardaki gibi doğruysa yanlış, yanlışsa doğru olan bir önermeyi ele alalım. Klasik mantıkta doğru önermeye 1 değeri, yanlış önermeyeyse 0 değeri verilir. Dolayısıyla, eğer tümcemizin değerine p dersek şöyle bir sonuç çıkar:

$$p = 1 \text{ ise } p = 0\text{'dır}$$
$$p = 0 \text{ ise } p = 1\text{'dır.}$$

Soldaki p'ye "eski p" diyelim ve p_e olarak gösterelim. Sağdaki p'ye "yeni p" diyelim ve p_y olarak gösterelim. Demek ki,

$$p_e = 1 \text{ ise } p_y = 0\text{'dır}$$
$$p_e = 0 \text{ ise } p_y = 1\text{'dır.}$$

Cebirsel olarak, bu,

$$p_y = 1 - p_e$$

demektir. Oysa biz bir tek p istiyoruz. "Yeni p", "eski p" gibi ayrım istemiyoruz. O zaman $p_e = p = p_y$ olsun. Yukardaki

$$p_y = 1 - p_e$$

denkleminden $p = 1 - p$ denklemini buluruz. Ne $p = 0$ ne de $p = 1$ bu denklemin çözümü olduğundan, klasik mantıkta çelişki çıkar. Oysa puslu mantık bunu kendine dert edinmez. $p = 1 - p$ denkleminin çözümü vardır: $p = 1/2$. Dolayısıyla, puslu mantıkta "bu tümce yanlıştır" tümcesinin doğruluk değeri 1/2'dir.

Uygulamada da kullanılan puslu mantık üzerine hemen hemen hiçbir şey bilmiyorum. Bu ilginç kuram üzerine daha fazla öğrenmek isteyen okur Kaynakça [38]'e başvurabilir.

7. Matematikte Çelişki: "Matematikte çelişki" kavramı tarih boyunca değişmiştir. Yunanlılar, $\sqrt{2}$ sayısının kesirli sayı olmadığını anlayınca, önce çelişkinin doğada var olduğunu sanmışlar, daha sonra omuz silkip kesirli olmayan sayıların varlığını kabul etmek zorunda kalmışlardır.

Dinsel ve felsefi inançların da matematikçileri çelişkide bıraktığı olmuştur. Örneğin, sonsuz kavramı birçok matematikçiyi "çelişkiye" düşürmüştür. Zenon'un ünlü paradokslarının[4] her biri "sonsuz" kavramından kaynaklanmıştır.

İnanç ve sezgilerle matematiğin çelişmesi, günümüzdeki anlamıyla, matematikte bir çelişki değildir. Bugünkü anlamıyla matematikte çelişki, matematiksel bir tümcenin hem doğruluğunun, hem de yanlışlığının kanıtlanmasıdır. Örneğin bugün matematikte kabul edilen belit (aksiyom) ve kanıtlama yöntemleriyle $2 \neq 2$ tümcesini kanıtlayabilirseniz o zaman bir çelişki elde etmiş olursunuz (çünkü "$2 = 2$" tümcesi matematikte bilinen bir teoremdir!)

Matematikte çelişki var mıdır? Bu soru matematikçileri uzun yıllar zorlamıştır. 1930 yılı dolaylarında Kurt Gödel matematikte çelişkinin olmadığını kanıtlamamızın olanaksız olduğunu kanıtlamıştır.[5] Gödel'in bu teoreminden matematikte çelişki olmadığı sonucu çıkmaz. Gödel yalnızca matematiğin çelişkisiz olduğunun kanıtlanamayacağını kanıtlamıştır.

---

4 **Matematik ve Doğa** adlı kitabımda Zenon'un paradokslarını bulabilirsiniz. (Matematik ve Doğa, Nesin yayıncılık, 2008.)

5 Örneğin Kaynakça [25], Bölüm 1, 14'üncü altbölüm, Teorem 14.1'e bakınız. Bu konuya *Gödel'in Bir Başka Teoremi* başlıklı yazıda da değiniyorum. Sayfa 221'de de Gödel hakkında bir yazı bulacaksınız.

Yazımızın geri kalan bölümünde -sonradan giderilen- matematiksel bir çelişkiyi (paradoksu) konu edeceğiz.[6]

8. Russell Paradoksunun Tarihçesi: Yukarda sözünü ettiğimiz katalog paradoksunun bir benzerini ünlü matematikçi ve filozof Bertrand Russell (1872-1970) 1901'de, daha henüz 28 yaşındayken bulmuştur. Bunun için Kaynakça [34], s.101–107'ye bakınız. O günün matematiğinin çelişkiden yoksun olmadığını gösteren bu paradoks tahmin edileceği gibi matematiği sarsmış ve onları matematikçileri matematiğin temelleri üzerine daha derin düşünmeye zorlamıştır.[7]

Russell paradoksunun ortaya çıkışı oldukça trajiktir. Modern mantığın kurucularından sayılan Alman matematikçi ve mantıkçı Frege 1893'te *Aritmetiğin Temelleri* adlı ünlü yapıtının birinci cildini yayımladı: Kaynakça [14]. Frege bu yapıtında, aritmetiği sağlam temellere dayanan bir kümeler kuramına indirgemek istemiştir. İkinci cildin yazılması oldukça zaman alır: Kaynakça [15]. Belki de bu gecikmenin nedeni çok karmaşık ve matematikçilerin alışık olmadıkları bir dilde yazılan birinci cildin Frege'in umduğu ve görmesi gereken ilgiyi görme-

---

6 Matematikte çelişki nasıl giderilir? Matematiği değiştirerek! Yani matematikte kabul edilen belitleri (aksiyomları) ve gerekliyse kanıt yöntemlerini yani çıkarım kurallarını, değiştirerek.

7 Aslında matematikte ilk ciddi çelişkiyi bulan Bertrand Russell değildi. 1897'da Burali-Forti (1861–1931) adında bir İtalyan matematikçi birazdan açıklayacağımız Russell paradoksunun bir benzerini bulmuştu. Bkz. Kaynakça [6]. Burali-Forti paradoksundan Russell'ın haberi vardı. Hatta 1903'te Russell bu paradoksu ortadan kaldırdığını sanmıştı yanlışlıkla. Kaynakça [34], s.43. Bu yayınından iki yıl sonra, Russell, Burali–Forti paradoksunun kolay kolay giderilmeyecek önemli bir paradoks olduğunu kavramış ve Kaynakça [35]'te paradoksu ortadan kaldırmanın yollarını aramıştır. Russell çözüme tipler kuramını bularak ulaşmıştır. Bkz. Kaynakça [36]. Yazının sonunda kısaca bu kuramdan sözedeceğiz.
Neden bugün Burali-Forti paradoksunun Russell paradoksu kadar tanınmış olmadığını bilmiyorum. Belki de Russell paradoksunun daha kolay anlaşılır olduğundandır.

mesidir. 1902'de yapıtın ikinci cildinin yazılması tamamlanmış ve baskıya verilmiştir. İşte tam bu sırada, 54 yaşındaki Frege, 30 yaşındaki Russell'dan "Sevgili Meslektaş" diye başlayan 16 Haziran 1902 tarihli bir mektup alır [22, sayfa 124–5]. Bu mektupta Russell, Aritmetiğin Temelleri'nin birinci cildini okuduğunu, çok yararlandığını, çok sevdiğini belirtir, Frege'i göklere çıkarır, ikinci cildi dört gözle beklediğini söyler. Mektubun ortalarında da bulduğu paradoksu açıklar. Frege mektubu okuduğunda uğradığı düş kırıklığının boyutunu tahmin etmek zor olmasa gerek. Çok emek verdiği baskıdaki yapıtı ve yaşamını adadığı, temelini kurduğunu sandığı bilim birden yokolup gitmiştir. Kitabını baskıdan çekip temel değişiklikler yapması için çok geçtir ayrıca ne gibi temel değişiklikler yaparak çelişkiyi gidereceğini bilmemektedir. Bir sonsöz yazmakla yetinmek zorunda kalır. Frege, Russell'ın mektubunu 22 Haziran 1902 günü yanıtlar, yani Russell'ın mektubunu yazdığı günden tam altı gün sonra. Kaynakça [22], s.127-8'e bakınız. Bu çok ilginç mektuptan alıntılar sunmak istiyorum:

> Sevgili Meslektaş,
>
> 16 Haziran tarihli ilginç mektubunuz için çok teşekkür ederim. Benimle çoğu konuda aynı düşüncede olmanıza ve çalışmamı ayrıntılarıyla tartışmak istemenize sevindim. İsteğiniz üzerine aşağıda adlarını bulacağınız yayınlarımı yolluyorum [...]
>
> Sizin elinizle yazıldığını sandığım boş bir zarf geldi postadan. Galiba bana bir şey göndermek istemiştiniz ve o şey yanlışlıkla kayboldu. Eğer kuşkum doğruysa inceliğiniz için teşekkür ederim. Zarfın ön yüzünü mektubuma iliştiriyorum.
>
> [...]
>
> Bulduğunuz çelişki beni çok büyük şaşkınlığa, belki büyük üzüntüye demek daha doğru olur, uğrattı, çünkü, aritmetik kuramını dayandırdığım temeli sarstı. Bana öyle geliyor ki [...] beşinci kuralım yanlış (20. bölüm, sayfa 36), 31. bölümde sunduğum açıklamalar [yeterli değil]. Durum öylesine ciddi ki, 5. kuralın yanlışlığı, salt öne sürdüğüm temeli sarsmakla kalmıyor, galiba aynı zamanda aritmetiğin sağlam bir temele dayandırılamayacağını da gösteriyor. [...] Her durumda buluşunuz çok önemli ve – şimdilik bir müjde niteliğini taşımasa da – ilerde mantıkta büyük ilerlemelere neden olabilir.
>
> [...]

Grundgesetze'nin[8] ikinci cildi yakında çıkacak. Kitabın sonuna bulduğunuz çelişkiden sözeden bir ek yazacağım elbet. Keşke doğru görüş açısına zamanında sahip olsaydım.

Saygılarımla,

G. Frege[9]

Frege kitabının sonsözünün başında şöyle yazar:

> Bir biliminsanı için, yapıtı biter bitmez temellerinin yıkılmasından daha korkunç bişey düşünülemez. Yapıt tam baskıya hazırlanırken Bay Bertrand Russell'dan aldığım bir mektup beni işte bu duruma soktu.

9. Russell'ın Paradoksu: Yazının bundan sonrasında Russell'ın bu paradoksunu açıklamaya çalışacağız[10].

Sanılanın tersine matematikte küme kavramı bu yüzyılda ortaya çıkmamıştır. Bu kavram, açıkça adı söylenmese de, Yunanlılardan beri biliniyordu. Daha sonra Alman Matematikçi Georg Cantor (1845-1918) küme kuramını yazılı olarak ortaya attı. O zamanlar bir nesnenin küme olabilmesi için birtakım koşulların gerektiği bilinmiyordu. Akla gelebilecek tüm nesnelerin bir küme oluşturabileceği sanılıyordu. Hele küme gibi "doğal" bir kavramın günün birinde matematiği çelişkiye düşüreceği akıllara hiç gelmiyordu. 19'uncu yüzyılın sonuna dek, matematikçiler gördükleri, düşünebildikleri her matematiksel nesne topluluğuna küme adını vermekten çekinmediler. Tam sayılar kümesi, çift sayılar kümesi, bir düzlemin noktaları kümesi, bir düzlemin eğrileri kümesi, bir düzleme çizilebilen dikdörtgenler kümesi, bu kümelerin bileşimi, bir kümenin altkü-

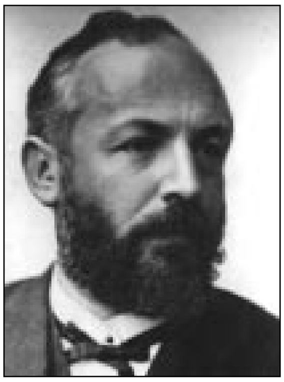
---

8 Bkz. Kaynakça [14] ve [15].

9 Mektubun aslı Almanca. Çeviri, Kaynakça [22]'deki İngilizce metinden yapıldı.

10 Russell'ın paradoksu, Russell'dan bağımsız olarak Zermelo (1871–1953) tarafından da bulunmuştur. 1908'de yayımlanan bir yazısına Zermelo şöyle bir dipnot düşmüştür: "Bu paradoksu ben de Russell'den bağımsız olarak bulmuş ve 1903'te aralarında Profesör Hilbert'in de bulunduğu birkaç matematikçiye bildirmiştim." Bkz. Kaynakça [41].

meleri kümesi… Her topluluk bir küme oluşturabilirdi. Hatta tüm kümeler kümesi bile... Küme kavramı o zamanların matematikçileri için sezgisel bir kavramdı[11]. Yıllar boyunca matematikçiler bir kümenin oluşması için kısıtlayıcı koşullara gerek görmediler. Biz de, şimdilik, kümeyi bu anlamda alalım: herhangi bir öğeler topluluğuna küme adı verilir. Eğer x, A kümesinin bir öğesiyse, bu, matematikte, $x \in A$ olarak gösterilir. Eğer x, A kümesinin bir öğesi değilse, $x \notin A$ yazarız. Örneğin, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesiyse, yani



Georg Cantor

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

ise,

$$5 \in \mathbb{N}$$
$$\sqrt{4} \in \mathbb{N}$$

dir. Ama

$$1/2 \notin \mathbb{N}$$
$$-3 \notin \mathbb{N}$$
$$\sqrt{3} \notin \mathbb{N}$$
$$\pi \notin \mathbb{N}$$

dir.

Eğer A bir kümeyse, A kümesinin belli bir özelliğe (iyeliğe) sahip öğeleri bir başka küme oluştururlar. A kümesinin bir **altkümesi**dir bu yeni küme. Örneğin, yukardaki doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$'nin "çift olma" özelliğini taşıyan öğeleri, $2\mathbb{N}$ olarak simgelenen çift doğal sayılar kümesini oluştururlar.

Tüm kümelerin bir küme oluşturduğunu varsayalım. Bu kümeye A adını verelim. A kümesi "evrendeki" tüm kümeleri

11 Bugünün matematiğinde de kümenin ne demek olduğu tam bilinmiyorsa da, her nesneler topluluğunun bir küme olmayabileceği biliniyor.

içeriyor. Yukardaki $\mathbb{N}$ kümesini de, $2\mathbb{N}$ kümesini de... Yani $\mathbb{N} \in A$ ve $2\mathbb{N} \in A$ matematiksel tümceleri doğru tümcelerdir. Daha genel olarak, eğer x herhangi bir kümeyse, "$x \in A$" matematiksel tümcesi doğrudur. A da bir küme olduğundan, "$A \in A$" matematiksel tümcesi de doğrudur. Demek, A kendi kendisinin bir öğesi. Öte yandan, $\mathbb{N}$ kümesi kendi kendisinin bir öğesi değil, çünkü $\mathbb{N}$ kümesinin öğeleri doğal sayılar ve $\mathbb{N}$ bir doğal sayı değil. Demek ki "$\mathbb{N} \in \mathbb{N}$" matematiksel tümcesi yanlış ve "$\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$" matematiksel tümcesi doğru.

Şimdi A kümesinin "kendini içermez" özelliğini taşıyan öğelerinden oluşan altkümeyi ele alalım. Bu kümeye B adını verirsek, B, kendini içermeyen kümeler kümesidir. Yani B'nin öğeleri kümeler ve kendini öğe olarak içermeyen kümeler[12]. Yani, $x \in B$ ancak ve ancak $x \notin x$ ise. Örneğin, yukardaki paragrafa göre, $A \notin B$, ama $\mathbb{N} \in B$.

Şimdi şu soru üzerine düşünelim: B kümesi, B'nin bir öğesi midir? Yani B kümesi kendisinin bir öğesi midir?

Önce B'nin kendi kendisinin bir öğesi olduğunu varsayalım. Yani "$B \in B$" matematiksel tümcesinin doğru olduğunu varsayalım. Eğer B, B'nin bir öğesiyse, o zaman B, B'nin bir öğesi olmamalı. Çünkü B, bu tür kümeleri, yani kendisinin öğesi olan kümeleri içermiyor.

Şimdi de B'nin kendi kendisinin öğesi olmadığını varsayalım. Yani "$B \notin B$" matematiksel tümcesinin doğru olduğunu varsayalım. O zaman (B kümesinin tanımına göre) B, B'nin bir öğesi olmalı.

Bir çelişki elde ettik[13]. İşte Bertrand Russell'ın paradoksu.

---

12 Matematiksel olarak B'nin tanımı şöyle verilir: $B = \{x \in A : x \notin x\}$. A, tüm kümeler kümesi olduğundan, bunu $B = \{x : x \notin x\}$ olarak da yazabiliriz. Yani, her$x$ için, $x \in \mathrm{B} \Leftrightarrow x \notin x$ matematiksel tümcesi doğrudur.

13 Bu çelişki matematiksel olarak kolayca anlaşılır: Bir önceki dipnottaki B kümesinin tanımı olan $\forall x\ (x \in B \Leftrightarrow x \notin x)$ matematiksel tümcesinde, $x = B$ alırsak, $B \in B \Leftrightarrow B \notin B$ elde ederiz.

10. Çelişki Nasıl Giderildi? Bu paradoks, kümeler kuramının öbür paradoksları gibi, bugün ortadan kalkmıştır. Kümeler kuramını değiştirmek, daha sağlam temellere oturtmak gerekmiştir bunun için. Bertrand Russell, paradoksunu ortadan kaldırmak amacıyla, 1908'de **tipler kuramı** adı verilen bir kuram ortaya atmıştı[14]. Tipler kuramı kümeleri derecelendirir. Örneğin, dördüncü dereceden bir kümeyi tanımlamak için ancak birinci, ikinci ve üçüncü dereceden kümeler kullanılabilir. Böylece yukarda A adını verdiğimiz, "tüm kümeler kümesi" diye bir küme matematikte yasaklanmış olur ve Russell'ın paradoksu paradoks olmaktan çıkar. Yani Russell akla gelen her nesnenin küme olmasını yasaklayarak, matematiği değiştirmiş, (şimdilik) çelişkisiz bir matematik yaratmıştır. Ünlü Fransız matematikçisi Poincaré'nin de dediği gibi, kurtlardan korumak için sürünün çevresine bir çit çekilmiştir, ancak, birazdan da göreceğimiz gibi, çitin içinde kurt olup olmadığını bilmiyoruz.

Russell'ın tipler kuramında çalışmak matematikçilere zor gelmiştir. Örneğin bu kuramda iki kümenin eşit olduğunu kanıtlamak için bin dereden su getirmek gerekir. Matematikçiler zor olan hiçbir şeyi sevmediklerinden, tipler kuramını daha basit bir kuramla değiştirmişlerdir.[15]

11. Matematikte Çelişki Var mıdır? Daha önce de belirttiğimiz gibi bugünkü matematik sisteminde çelişki olmadığını

14 Kaynakça [36]. Tipler kuramına benzer bir kuram Kaynakça [34]'te de vardır. Ancak Russell bu konuda düşüncelerini bir süre terkedip, Kaynakça [35]'te paradoksu çözmenin (ya da yok etmenin) başka yollarını aramıştır.

15 Kümeler kuramının belitlerine kapsama düzenlemesi (comprehension scheme) adı verilen bir belit eklenerek yapılmıştır bu değişiklik. Bu belite göre, eğer C bir kümeyse ve $\varphi(x)$ bir formülse, C'nin φ özelliğini taşıyan öğeleri bir başka küme oluştururlar. Burada önemli olan φ özelliğini taşıyan "evrendeki" tüm öğelerin değil, yalnız C'dekilerin bir küme oluşturmasıdır. Yukardaki A nesnesi bu belite göre oluşturulmadığından, A'nın küme olup olmadığından hemen emin olamayız ve bugünün matematiği eğer çelişkisizse A bir küme olamaz elbet, yoksa Russell paradoksuyla bir çelişki elde ederdik.

kanıtlayamayız.[16] Gödel kanıtladı bu olanaksızlığı. Peki, matematikte bir gün çelişki bulunursa ne olur? Çelişkisine bağlı. Matematikçilerin genel kanısı şu: Gelecekte bir gün matematikte bir çelişki bulunursa, bu çelişki belitlerde bir iki küçük değişiklik yapılarak giderilebilir; olası bir çelişki Matematik'i yıkamayacağı gibi, sarsamaz bile, olsa olsa şöyle biraz titretir.

16 "Bugünkü matematik sistemi" demekle günümüz matematikçilerinin büyük çoğunluğunun kabul ettiği kümeler kuramı demek istiyorum. ZFC adı verilen bu kuramın ilk belitleri 1908'de Zermelo (ZFC'nin Z'si) tarafından bulunmuştur. (Bkz. Kaynakça [42].) 1920'lerde Fraenkel (Kaynakça [13]) (ZFC'nin F'si), Skolem (Kaynakça [37]) ve Mirimanov (Kaynakça [27]) birbirinden bağımsız, yerleştirme beliti (axiom of replacement) adı verilen bir belitin eklenmesini önermişlerdir. ZFC'nin C'siyse seçme beliti (axiom of choice) adı verilen ve yüzyılımızın başında büyük kavgalara neden olan çok özel bir beliti simgeler.