

Sayılarla İlgili Bir Soru

Kesirli sayıları bilirsiniz: a ve b tamsayıları için, a/b biçiminde yazılan sayılara kesirli sayılar denir. Örneğin, $3/5$, $-2/3$ sayıları kesirli sayılardır. 5 de kesirlidir, çünkü 5 , $5/1$ biçiminde de yazılabilir.

Bir zamanlar, uzun zaman önce, antik Yunan zamanında, her sayının kesirli olduğu sanılırdı. Yanlış! Örneğin $\sqrt{2}$ kesirli bir sayı değildir. Bunun kanıtı birçok kitapta bulunduğundan ve ben de bu kanıtı daha önce birkaç kez yazdığımdan, burada yinelemeyeceğim. Genel olarak, eğer n tam sayısı tam bir kare değilse, \sqrt{n} kesirli bir sayı olamaz.

Eğer a ve b kesirli sayılarsa, a^b kesirli olmayabilir mi? Elbette olmayabilir. Örneğin $a = 2$, $b = 1/2$ olsun. O zaman, $a^b = \sqrt{2}$ 'dir ve kesirli değildir.

Bu kolaydı. Daha zor bir soru: Eğer a ve b kesirli değilse, a^b kesirli olabilir mi?

Yanıt: Evet!

İki şıkkımız var: $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ ya kesirlidir ya da kesirli değildir.

Birinci Şık: $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ kesirli bir sayıysa. O zaman bir sorunun yok, $a = b = \sqrt{2}$ olsun. O zaman a^b kesirli bir sayıdır.

İkinci Şık: $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ kesirli bir sayı değilse. O zaman da bir sorun yok. $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ olsun, $b = \sqrt{2}$ olsun. Şimdi, $a^b = ((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$, ve 2 kesirli bir sayıdır.

Güzel değil mi? Yanıt ya $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ ya da $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$. Hangisinin sorumuzu yanıtladığını bilmiyoruz, ama biri yanıtıyor.