

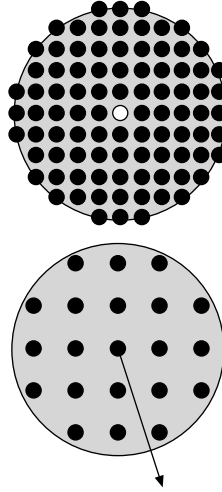
Bahçe Sorusu¹

1 Giriş. Daire biçiminde bir bahçeye, merkezden başlayarak, birer metre aralıklarla yatay ve dikey sıralanmış fidan dikmeyi düşünüyoruz.

Bahçenin merkezine fidan dikmeyeceğiz. Soru şu: Bahçenin merkezinden baktığımızda bahçenin dışındaki herhangi bir noktayı görebilir miyiz?

Yanıt, bahçenin büyüklüğüne ve fidanların kalınlığına göre değişir elbet. Eğer bahçe küçükse ve fidanlar inceyse, merkezden belli bir yöne bakarak bahçenin dışındaki bir noktayı görebiliriz. Ama ilk şekildeki gibi bahçe büyükse ve fidanlar kalınsa, fidanlar bahçenin dışını görmemizi engeller.

O zaman sorumuzu biraz daha belirleyelim. Bahçemizin yarıçapı 50 metre olsun. Fidanlarımızın da yarıçapı 2 santimetreden biraz büyük olsun, diyelim 2,01 santimetre. Bu ölçülerle, bahçenin merkezinden



¹ Bu yazı, Kaynakça [8]'deki bir yazıdan uyarlanmıştır. İngilizce bilen okurlara bu harika popüler matematik kitabını öneririm.

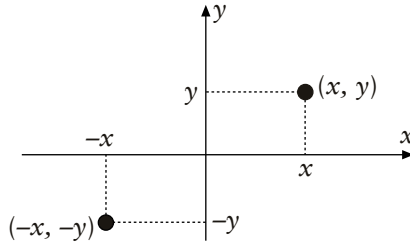
bakıldığında bahçenin dışı görülür mü?

Fidanlar her metreye dikileceğinden fidanların yarıçapı oldukça küçük sayılır. Bu yüzden bahçenin dışının görüleceği sanılabilir. Bunun doğru olmadığını göreceğiz (fidanlar küçük ama bahçe büyük!)

Bu somut problemin yanıtı soyut problemlerin yanıtını gerektirecek. **Geometrik Sayılar Kuramı** adı verilen konuda bir iki teorem kanıtlayacağız. Geometrik Sayılar Kuramı, adından da anlaşılacağı üzere, hem geometriyi hem de sayıları ilgilendiren çok güzel bir konudur. On dokuzuncu yüzyılda, Hermann Minkowski (1864–1909) adlı Litvanyalı matematikçi tarafından geliştirilmiştir ilk olarak. Yani oldukça yeni bir konu sayılır.



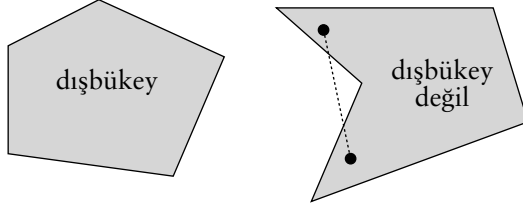
2. Ön bilgi. Teoremlerimizi kanıtlamak için okurun pek yabancı olmadığını sandığım birkaç tanım ve olguya gereksiniyoruz.



2.1. Eksenleri çizilmiş bir düzlemde herhangi bir (x, y) noktası alalım. Bu noktanın merkeze göre simetriğinin koordinatları, aşağıdaki şekilden de anlaşılacağı gibi, $(-x, -y)$ 'dir.

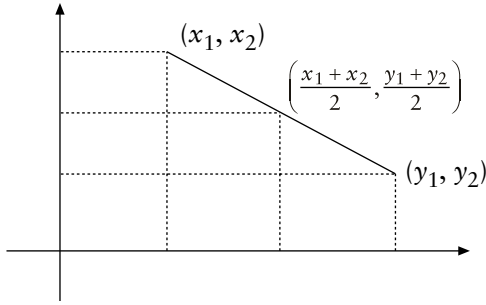
Merkezdeki $(0, 0)$ noktasına O noktası diyeceğiz.

2.2. Düzlemde bir bölge alalım. Eğer bu bölgenin her iki noktası arasındaki doğru parçası düzlemin içine düşüyorsa, bölgeye *dışbükey* adı verilir. Örneğin yan sayfada soldaki bölge dışbükeydir. Sağdakiyse dışbükey değildir. Çünkü sağdaki



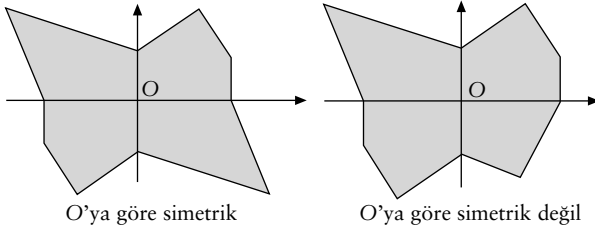
şekilde, sol üst ve sol alttan iki nokta alırsak, bu noktalar arasındaki doğru parçası bölgenin dışına taşar.

2.3. Düzlemde iki (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktası alalım. Bu iki noktanın tam ortasındaki nokta $((x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2)$ noktasıdır:

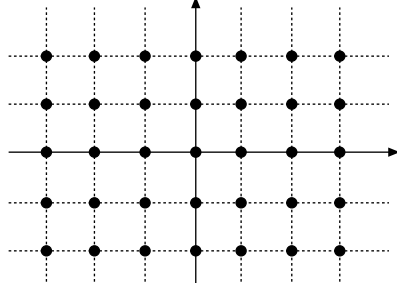


Eğer (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktaları dışbükey bir bölgedeyse, bu iki noktanın ortasındaki $((x_1 + x_2)/2, (y_1 + y_2)/2)$ noktası da aynı bölgededir.

2.4. Gene düzlemde bir bölge alalım. Eğer, bölgedeki her (x, y) noktası için, $(-x, -y)$ noktası da bölgedeyse, bölgeye **O'ya göre simetrik** denir. Örneğin soldaki bölge O'ya göre simetrik, ama sağdaki değildir.



2.5. Koordinatları tam sayı olan noktalara *tamnokta* adını vereceğim. Örneğin, $(0, 0)$, $(3, 5)$, $(-2, 4)$, $(3, 0)$ noktaları tamnoktalardır. $(1/2, 7)$ noktası bir tamnokta değildir. Birkaç tamnokta gösterelim (Tamnoktalar, doğruların kesişim noktalarıdır):



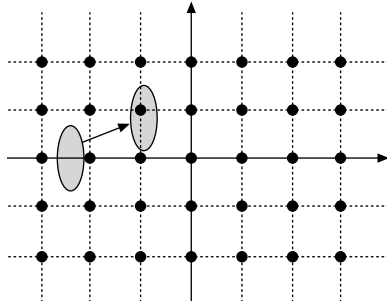
Fidanlarımızı bahçenin tamnoktalarına dikeceğimize okurun dikkatini çekerim.

Artık geometrik sayılar kuramının ilgilendiği sorulara geçebiliriz.

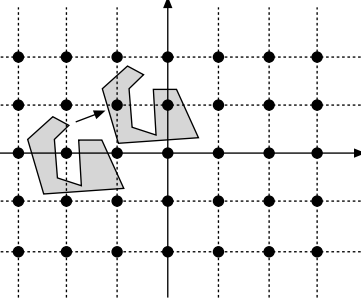
3. **Blichfeldt Önsavı.** Düzlemde bir bölge ele alalım. Eğer bölgenin alanı 0'dan büyükse, bu bölgeyi sağa, sola, yukarı, aşağı, belli bir yöne doğru öteleyerek (döndürme yok, tek yasal hamle öteleme), bölgeyi içine bir tamnokta gelebilecek bir konuma getirebiliriz.

Bu kolaydı. Peki, yine aynı yöntemle, yani öteleyerek, bölgenizin içine iki tamnokta sokabilir miyiz?

Eğer bölgenin alanı küçükse, nereye ötelersek öteleyelim içine iki tane tamnokta girecek bir konuma getiremeyiz elbet. Örneğin, eğer bölgemiz küçük bir daireyse, diyelim $1/4$ yarıçaplı, o zaman bölgeyi nereye ötelersek öteleyelim içine iki tane tamnokta düşüremeyiz.



Peki, belli bir yöne doğru öteleyerek içine iki tane tamnokta düşürebilmemiz için bölgenin alanı en az kaç olmalıdır? Eğer bölgenin alanı 1'den büyükse bölgeyi öteleyerek içine iki tamnokta sokabiliriz. Birazdan bunu kanıtlayacağız. Bölgenin biçimi ne olursa olsun... Yeter ki alanı 1'den büyük olsun...



Şimdi daha zor bir soru soralım. Bölgenin içine (her zamanki gibi öteleyerek) üç tamnokta sokabilmemiz için, bölgenin alanı en az kaç olmalıdır? Eğer alan 2'den büyükse, bölgeyi belli bir yöne doğru öteleyerek, bölgenin içine en az üç tane tamnokta sokabileceğimizi kanıtlayacağız birazdan. Bölgenin biçimi ne olursa olsun... İster yuvarlak, ister kare, ister upuzun bir dikdörtgen, ister yılan gibi kıvrır kıvrır olsun... Yeter ki alanı 2'den büyük olsun.

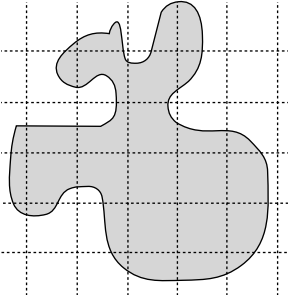
Genel olarak, eğer bölgemizin alanı n 'den büyükse, öteleyerek (döndürmeye gerek yok) içine $n + 1$ tane tamnokta girecek konuma getirebiliriz. Bu, şimdilik bir sanı. Matematiksel kesinlikle kanıtlayamadığımız sürece de bir sanı olarak kalacak. Blichfeldt adlı bir Amerikan matematikçi bu sanıyı kanıtlamış.

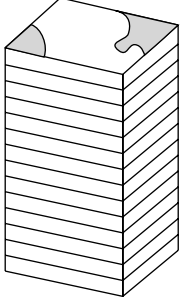
Blichfeldt Önsavı: Alanı n 'den büyük olan bir bölgeyi öteleyerek, bölgenin içine $n + 1$ tane tamnokta sokabiliriz.

Kanıt: İlk olarak tamnoktalardan geçen yatay ve dikey doğruları çizelim. Sonra da bölgemizi bir renge boyayalım, örneğin kırmızıya.

Boya değmiş kareleri keselim ve bu kareleri **döndürmeden** üstüste yığalım.

Kareleri üstüste yığarken kareleri döndürmemeye özellikle dikkat edelim.





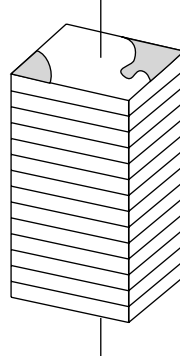
Yani kareleri yerlerinden kaldırıp üstüste yığarken karelerin yönünü değiştirmeyelim. Üstüste konmuş bir yığın kare elde ettik. Her karenin bir bölümü boyanmış, bir bölümü boyanmamış. Boyanmış bölümlerin toplam alanının n 'den büyük olduğunu biliyoruz, çünkü bölgemizin alanı n 'den büyüktü.

Bu kare yığını yukardan aşağıya doğru bir tıgla delelim.

Bu tıg her kareyi bir noktadan delecek. Tıgın herhangi bir kareyi deldiği nokta boyanmış da olabilir, boyanmamış da. Tıg kaç boyanmış noktadan geçebilir? Hiçbir boyanmış noktadan geçemeyebilir, bir tek boyanmış noktadan geçebilir, iki boyanmış noktadan geçebilir... Tıgı soktuğumuz yere göre değişir bu sayı.

Bir sav ortaya atıyorum: *Tıgı öyle bir yerden geçirebiliriz ki, tıg en az $n + 1$ tane boyalı nokta deler.*

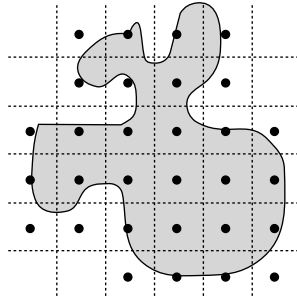
Kanıtlamam gerek bu savımı. Kanıtlayayım. Diyelim savım yanlış. Yani diyelim ki, tıg nerden geçirilirse geçirilsin, en fazla



n tane boyalı nokta deler. Bu varsayımdan bir saçmalık, bir çelişki çıkaracağım ve böylece savımı kanıtlamış olacağım. En alttaki kareyi ele alalım. Öbür karelerin boyalarının bu en alttaki karenin üstüne kat kat sürülmüş olduğunu varsayalım bir an. Örneğin, en alttaki karenin bir noktasının üstünde 6 tane boyalı nokta varsa, o en alttaki noktanın 6 kat boyanmış olduğunu varsayalım. Böylece en alttaki karenin her noktasını üstüne birkaç kat boya çekilmiş bir nokta olarak görebiliriz. Üstüste en fazla n tane boyalı nokta olduğunu varsaydığımızdan, en alttaki karenin her noktasına en fazla n kat boya çekilmiş olduğu anlaşılır. En alttaki karenin alanı 1 olduğundan ve her noktaya en fazla n kat boya çekildiğinden, toplam sürülen boya alanının en fazla n olduğu çıkar. Oysa boyalı alanımız n 'den büyüktü. Bir çelişki elde ettik ve savımız kanıtlanmış oldu.

Blichfeldt'in önsavının kanıtına geri dönelim.

Şimdi, tığımızı en az $n + 1$ boyalı noktayı delecek biçimde geçirelim. Tığımız her karede bir delik açacak. Bu açılan deliklerin en az $n + 1$ tanesi boyalı noktalardan oluşuyor. Şimdi karelerimizi eski yerlerine yerleştirelim. Kareleri döndürmediğimizden, eski şekli yeniden elde ettik, aradaki tek ayırım, karelerde bulunan delikler:



Bu deliklerin yerlerine dikkat ederseniz, aynen tamnoktalar gibi yerleştirildiklerini görürsünüz. Şimdi bölgemizi, bu deliklerden herhangi birinin herhangi bir tamnokta üzerine gelecek

biçimde ötelerek, bölgemizin içine en az $n + 1$ tane tamnokta girdiğini görürüz.

Böylece Blichfeldt Önsavı'nı kanıtlamış olduk.

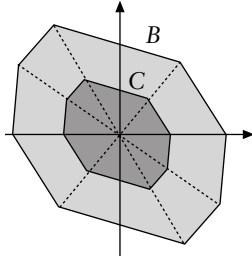
4. Bir Sonuç. Aslında bize gereken yukarda kanıtladığımız önsavın yalnızca özel bir durumu. Yukardaki önsavda n 'yi 1 olarak alırsak, alanı 1'den büyük olan bir bölgeyi öteleyerek içine iki tamnokta girebilecek konuma getirebileceğimiz anlaşılır. Bundan da şu sonuç çıkar:

Önsav. Alanı 1'den büyük bir bölgenin içinde, koordinatlarının farkı da tamsayı olan en az iki nokta vardır. Yani bölgenin içinde öyle (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktaları vardır ki, $x_2 - x_1$ ve $y_2 - y_1$ birer tamsayıdır.

5. Minkowski'nin Teoremi. Sıra Minkowski'nin ünlü teoremini kanıtlamaya geldi. Görüldüğü gibi bahçe problemini çözmek pek kolay değil.

Minkowski Teoremi. Alanı 4'ten büyük ve $(0, 0)$ 'a göre simetrik olan dışbükey bir bölgede $(0, 0)$ 'dan başka bir tamnokta daha vardır.

Kanıt: Bölgemize B adını verelim. B bölgesini $1/2$ ölçütünde merkeze doğru küçütelim. Elde ettiğimiz bu yeni bölgeye C adını verelim. Sol da B 'yle C 'nin temsili resimlerini bulacaksınız.



B 'yle C 'nin alanları arasında nasıl bir ilişki vardır? Eğer B bir dikdörtgen olsaydı, C , B 'nin boyutlarının yarısı kadar bir dikdörtgen olurdu, dolayısıyla C 'nin alanı B 'nin alanının dörtte biri olurdu. Eğer B bir üçgen olsaydı, gene aynı nedenden C 'nin alanı B 'nin alanının dörtte biri olurdu. Genel olarak,

B 'nin şekli ne olursa olsun, C 'nin alanı B 'nin alanının dörtte biridir. B 'nin alanının 4'ten büyük olduğunu biliyoruz. Demek ki C 'nin alanı 1'den büyüktür. Dolayısıyla C 'ye Blichfeldt'in ön-savının sonucunu uygulayabiliriz: C 'de öyle (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) noktaları vardır ki, $x_2 - x_1$ ve $y_2 - y_1$ birer tamsayıdır.

B bölgesi O 'ya göre simetrik olduğundan, C de O 'ya göre simetriktir. Dolayısıyla $(-x_1, -y_1)$ noktası da C 'dedir.

B dışbükey olduğundan C de dışbükeydir. Demek ki, C 'de bulunduğunu bildiğimiz $(-x_1, -y_1)$ ve (x_2, y_2) noktalarının tam ortası olan $((x_1 - x_2)/2, (y_1 - y_2)/2)$ noktası da C 'dedir. C 'nin bu noktasına B 'de $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ noktası tekabül eder. $x_2 - x_1$ ve $y_2 - y_1$ tamsayı olduklarından bu son nokta bir tamnokta dır. Bulduğumuz bu tamnokta $(0,0)$ noktasından, yani merkezden değişiktir. Sonuç olarak B 'de merkezden değişik bir tamnokta bulduk: $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ noktası. Minkowski'nin ünlü teoremi de böylece kanıtlanmış oldu.

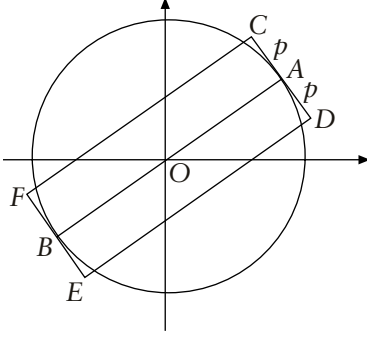
6. Bahçe Probleminin Çözümü. Şimdi artık bahçe probleme saldırabiliriz. Bahçemiz 50 metre yarıçaplı bir daire. Bahçenin merkezine O diyelim (Aşağıdaki şekle bakın.) Her fidanın yarıçapı 2 santimetreden, yani $1/50$ metreden daha büyük. En küçük fidanın çapına r diyelim. Metreyle ifade edersek, $r > 1/50$ eşitsizliğini elde ederiz. Öte yandan $r < 1$ çünkü fidanların çapları 1 metreden büyük olamaz (yoksa fidanlar birbirlerine toslarlar.) Şimdi p , $1/50 < p < r$ eşitsizliklerini sağlayan herhangi bir sayı olsun². Özet olarak,

$$1/50 < p < r < 1$$

eşitsizlikleri geçerli. Bu eşitsizlikleri aklımızda tutalım, birazdan gerekecekler.

Bahçenin sınırında herhangi bir A noktası alalım. Merkezden bakıldığında bu A noktasının görünmediğini kanıtlayacağım. Böylece problemimizi çözmüş olacağız.

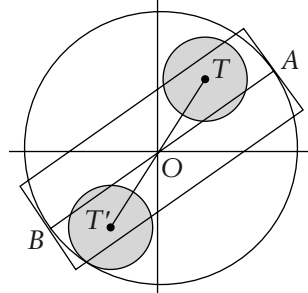
B noktası, OA doğrusuyla bahçemizin sınırının kesiştiği öbür nokta olsun. A ve B noktalarından bahçemize birer teğet çikalım. Ve bu teğetlerin üstünde bu noktalardan p uzaklıkta C, D, E ve F noktaları alalım.



$CDEF$ dikdörtgenine bakalım. Bu dikdörtgenin boyu bahçenin çapına, yani 100 'e eşit. Eniyse $2p$ 'ye eşit. Demek ki $CDEF$ dikdörtgeninin alanı $100 \times 2p = 200p$ 'dir. Ama $p > 1/50$. Demek ki $CDEF$ dikdörtgeninin alanı $200 \times 1/50$ 'den yani 4 'ten daha büyük. $CDEF$ dikdörtgeni dışbükey olduğundan ve O 'ya göre simetrik olduğundan, biraz önce kanıtladığımız Minkowski'nin teoremine göre, bu dikdörtgenin içinde O 'dan başka bir tamnokta daha vardır. Bu tamnokta T adını verelim. T 'nin O 'ya göre simetriği de bir tamnokta; bu tamnokta T' adını verelim.

T noktası bahçenin içinde olabilir de olmayabilir de. Önce T 'nin bahçenin içinde olduğunu varsayalım. T bahçedeyse, T' noktası da bahçededir. Bu iki tamnokta birer fidan dikilecek.

$CDEF$ 'nin eni $2p$ olduğundan ve her fidanın çapı p 'den daha büyük olduğundan, yandaki şekilden de anlaşılacağı üzere, T ve T' noktalarına dikilen fidan A ve B noktalarının merkezden görünmesini engelleyecektir.



Şimdi de T 'nin bahçede olmadığını varsayalım. Demek ki OT uzunluğu bahçenin yarıçapından, yani 50 'den daha büyük. Öte yan-

2 p 'yi $(r + 1/50)/2$ olarak alabiliriz dilersek.

dan T dikdörtgenin içinde, dolayısıyla OT uzunluğu OC 'den daha küçük olmalı. OAC diküçgenine bakalım. Pisagor teoremine göre,

$$OC^2 = OA^2 + AC^2 = 50^2 + p^2 < 2500 + 1 = 2501.$$

Sonuç olarak,

$$2500 < OT^2 \leq OC^2 < 2501$$

eşitsizliklerini elde ettik. T tamnoktasının koordinatlarına x ve y diyelim. x ve y birer tamsayı. Dolayısıyla, $OT^2 = x^2 + y^2$ de bir tamsayı. Demek ki OT^2 , 2500'den büyük ve 2501'den küçük bir tamsayı! Böyle bir tamsayı olmadığından, T noktası bahçenin içinde olmalı.

Problemimizi çözdük: Bahçenin dışını göremeyiz.



"O GÜN NEWTON YANLIŞ AĞACIN ALTINDAYDI..."