

Blöfün Matematiği

Bu yazıda, basitleştirilmiş birkaç poker oyunu oynayacağız. Yazıyı anlamak için poker bilmeye gerek yoktur. Oyunlarımızı iki kişi arasında ve as ve papazdan oluşan büyük bir destele oynatacağız. İlk oyunumuzda ikinci oyuncu önceden belirlenmiş birkaç kurala uyan bir makina olacak. Son oyunumuzdaysa, her iki oyuncu da özgür seçimlerde bulunabilen kişiler olacaklar ve birinci oyuncu blöf yapabilecek. Böylece oyunlar kuramına bir çeşit giriş yapmış olacağız.

1) **Oyunun Kuralları.** İçinde yalnız as ve papaz bulunan **büyük** bir deste alalım. Destedeki as (A) sayısı papaz (K) sayısına eşit olsun. Örneğin destede 500 A, 500 K bulunabilir. Oyunumuz, iki oyuncu arasında ve bu oyunculara birer kâğıt dağıtılarak oynanıyor. Oyunun başında, her iki oyuncu da ortaya birer lira koyarlar. Sonra, her iki oyuncuya birer kâğıt dağıtılır. Birinci oyuncu kâğıdına bakar ve aşağıdaki iki seçenekten birini seçer:

1. Pas geçebilir.
2. İki lira artırabilir.

Eğer birinci oyuncu pas geçerse ikinci oyuncu ortadaki parayı (2 lirayı) alır. Eğer birinci oyuncu pas geçmez de 2 lira artırırsa ikinci oyuncu da ortaya 2 lira koyar ve oyuncular kâğıtlarını açarlar; en yüksek kâğıdı olan ortadaki parayı (6 lirayı) alır. Eğer

her iki oyuncunun da kâğıtları aynıysa, ortadaki para paylaşılır.

Görüldüğü gibi ikinci oyuncunun bu oyunda bir seçeneği yok, oyunun kurallarına paşa paşa uymak zorunda: Birinci oyuncu pas geçerse ikinci oyuncu ortadaki parayı alacak, pas geçmezse ikinci oyuncu ortaya 2 lira koyup elini açacak. İkinci oyuncuyu bir makina, bir bilgisayar ya da kurallara uymak zorunda olan bir kumarhane krupiyesi olarak düşünebiliriz. Dolayısıyla ikinci oyuncunun nasıl oynaması gerektiği sorusu anlamsızdır. Ama birinci oyuncunun seçeneği olduğundan, birinci oyuncunun nasıl oynaması gerektiği sorusunu sorabiliriz. Soralım: *Birinci oyuncu kazancını artırmak için nasıl oynamalıdır?* Yazıya biraz tad vermek için birinci oyuncu olduğumuzu ve ikinci oyuncunun bir makina olduğunu varsayacağız.

Okurun, “elimizde A varsa 2 lira artıralım, K varsa pas geçelim,” dediğini duyar gibi oluyorum. Gerçekten de sezgimiz bu stratejinin doğru strateji olduğunu söylüyor. Bu oyuna biraz yakından bakıp sezgimizin yanılıp yanılmadığını anlayalım.

2) **Elimizde A varsa.** Eğer elimizde A varsa, pas geçmedikçe para kaybedemeyiz. En kötü olasılıkla ortadaki parayı makinayla paylaşırız, yani ne kazanır ne de kaybederiz. Dolayısıyla, elimizde A varsa pas geçmemeliyiz, 2 lira artırmalıyız. Bu basit akıl yürütmeyi biraz biçimselleştirelim. Elimizde A olduğunu varsayarak oyunun alabileceği çeşitli durumları yandaki şemada gösterdik.

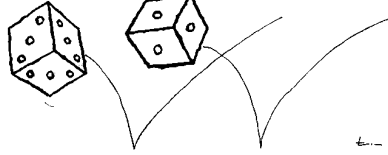
	Makinanın Kâğıdı	
	A	K
Elimizde A var		
Pas geçtik	-1	-1
Artırdık	0	3

Sütunlar makinanın kâğıdını, sıralar stratejimizi gösteriyor. Sayılarsa kazancımızı gösteriyorlar. Örneğin pas geçmeyip artırırsak ve makinanın papazı varsa, 3 lira kazanırız. Bu yüzden ikinci sıranın ikinci sütununa 3 yazdık. Pas geçsek, makinanın nesi olursa olsun, 1 lira kaybederiz. Bu yüzden birinci sıraya - 1 yazdık.

Görüldüğü gibi bu tablonun son sırasındaki sayılar bir üstteki sayılardan daha büyük. Bir başka deyişle, makinanın kâğıdı ne olursa olsun, artırırsak kazancımız daha fazla olur. Yani elimizde A varsa, 2 lira artırmalıyız.

Bu stratejinin doğru strateji olduğunun destedeki A ve K sayısından bağımsız olduğuna dikkatinizi çekerim. Destede çok A, az K bile olsa, kâğıdımız A ise, 2 lira artırmalıyız.

Elimizde A olduğunda ve artırdığımızda, ortalama kazancımızı, yani beklentimizi hesaplayalım¹. 1/2 olasılıkla



öbür oyuncunun elinde A olacak ve 0 lira kazanacağız. 1/2 olasılıkla öbür oyuncunun elinde K olacak ve 3 lira kazanacağız. Demek ki oyun başına ortalama kazancımız, yani beklentimiz

$$(1/2)(0) + (1/2)(3) = 3/2 = 1,5$$

lira olacak. Bir başka deyişle, elimize 1000 kez A gelse ve her seferinde 2 lira artırırsak, 1500 lira kazanmalıyız.

3) Elimizde K varsa. Elimizdeki kâğıt K ise, pas geçsek de geçmesek de para kazanamayız. Pas geçerse, oyunun başında ortaya koyduğumuz 1 lirayı kaybederiz. Pas geçmezsek, başımıza gelecekler makinanın kâğıdına göre değişir: Makinanın ası varsa 3 lira kaybederiz, makinanın papazı varsa ne kaybe-

1 “Beklenti”, ortalama kazanç demektir. Örneğin bir oyunda 1/8 olasılıkla 100 lira, 1/4 olasılıkla 10 lira kazanıyorsak ve geriye kalan 5/8 olasılıkla 20 lira kaybediyorsak, bu oyundan beklentimiz $(1/8)100 + (1/4)10 + (5/8)(-20) = 20/8$ liradır, yani 2,5 liradır. Demek ki bu oyunda, oyun başına ortalama 2,5 lira kazanırız. Bu oyunu bin kez oynarsak ve ne şanslı ne de şanssızsak, $1000 \times 2,5 = 2500$ lira kazanmalıyız. Bir başka deyişle bu oyun bizim için iyi bir oyundur. Bir başka oyunda 1/100 olasılıkla 100 lira ve geri kalan 99/100 olasılıkla 2 lira kaybediyorsak, bu oyunun beklentisi $(1/100)100 + (99/100)(-2) = -0,98$ liradır. Yani bu oyunu bin kez oynasak ve ne şanslı ne de şanssızsak, 980 lira kaybederiz. Bu oyunu oynamak işimize gelmez, oynamamalıyız. Genellikle Spor Toto ve Milli Piyango gibi oyunlarda tüketicinin beklentisi negatiftir, bu oyunları bir matematikçi oynamamalıdır.

deriz ne de kazanırız. Bu durumda nasıl bir strateji izlememiz gerektiği pek belli değil. Pas geçip de 1 lira kaybetmeyi kabullenmeli miyiz, yoksa şansımızı deneyip 2 lira artırmalı mıyız?

Aşağıdaki hesaplarda, destedeki A ve K sayısının birbirine eşit olduğunu varsayıyoruz.

Elimizde K olduğunu varsayalım ve oyunun alabileceği çeşitli durumları bir tabloyla gösterelim:

Elimizde K var	Makinanın Kâğıdı		Bu tablo birinci tablo gibi değil. Birinci tabloda bir sıranın sayıları öbür sıranın sayılarından daha büyüktü, dolayısıyla o tabloya bakarak
	A	K	
Pas geçtik	-1	-1	doğru stratejiyi bulmak kolaydı. Burda işimiz biraz daha zor. Hiçbir sıranın sayıları bir başka sıranın sayılarından daha büyük değil. Doğru stratejiyi bulmak için bir başka yöntem bulmalıyız.
Artırdık	-3	0	

İki şikkımız var: ya pas geçeceğiz ya geçmeyeceğiz. Her iki şikkın beklentisini bulalım.

Önce pas geçtiğimizi varsayalım. Makinanın kâğıdı ne olursa olsun 1 lira kaybedeceğiz, bir başka deyişle -1 lira kazanacağız. Bu şıkta beklentimiz -1'dir. Demek ki pas geçerse oyun başına ortalama kazancımız -1 lira olur, yani pas geçtiğimiz her oyun başına ortalama 1 lira kaybederiz. Pek parlak sayılmaz.

Pas geçmezsek beklentimiz daha mı iyi olur? Pas geçmeyip 2 lira artırdığımızı varsayalım. Oyundaki A ve K sayısı birbirine (aşağı yukarı) eşit olduğundan, 1/2 olasılıkla öbür oyuncunun elinde A vardır; yani 1/2 olasılıkla -3 lira kazanırız. 1/2 olasılıkla öbür oyuncunun elinde K vardır; yani 1/2 olasılıkla 0 lira kazanırız. Bu şıkta beklentimiz

$$(1/2)(-3) + (1/2)(0) = -3/2 = -1,5$$

dir. Demek ki pas geçmezsek ortalama kazancımız -1,5 liradır. Daha önce bulduğumuz beklentiden daha az. Yani bu şıkta daha çok kaybederiz.

Demek ki elimizde K olduğunda pas geçmeliyiz.

5) **Sonuç.** Sonuç olarak, elimizde A varsa 2 lira artırmalıyız, K varsa pas geçmeliyiz.

Bu oyunu oynamalı mıyız? Yani bu oyundan beklentimiz pozitif midir? Beklentimiz pozitifse oynamalıyız, negatifse oynamamalıyız, sıfırda oynasak da olur oynamasak da.

Elbet beklentimiz stratejiye göre değişir. Yukarıda bulduğumuz stratejiyle oynadığımızı varsayacağız. (Eline A geldiğinde pas geçen, K geldiğinde artıran oyuncunun beklentisi çok negatif olsa gerek!)

Kâğıtlar dört biçimde dağılırlar:

1/4 olasılıkla ikimize de A gelir; 0 lira kazanırız.

1/4 olasılıkla ikimize de K gelir; -1 lira kazanırız.

1/4 olasılıkla bize A ona K gelir; 3 lira kazanırız.

1/4 olasılıkla bize K ona A gelir; -1 lira kazanırız.

Dolayısıyla beklentimiz

$$(1/4)(0) + (1/4)(-1) + (1/4)(3) + (1/4)(-1) = 1/4$$

tür, yani pozitifdir, yani bu oyunu oynamak işimize gelir. Bu oyunu bin kez oynarsak, 250 lira kazanç beklemeliyiz.

Beklentinin pozitif olması gerektiğini okurlar yazının ta başında tahmin etmiş olabilirler.

6) **Dağılım Eşit Değilse.** Yukarıda, destedeki A ve K sayısının birbirine eşit olduğunu varsaydık. Ama her oyundan sonra oynanan kâğıtlar oyundan çıkarılırsa, destede kalan A ve K sayılarını hesaplayıp daha akıllıca oynayabiliriz.



Örneğin, diyelim elimize K geldi. Yukarda bulduğumuz yönteme göre, pas geçip 1 lira kaybetmeye razı olmalıyız. Ama, çıkan kâğıtları aklımızda tutmuşsak (destede iki tür kâğıt olduğundan kâğıtları saymak pek zor değildir) ve destede yalnız papazların kaldığını biliyorsak, makinanın kâğıdının K olduğunu biliyoruzdur. Bu bilgiyle pas geçmek akıllı bir seçim olmaz. 2 lira artıralım; hiç para kaybetmeyeceğimizden eminiz.

Ya da diyelim, destede 50 K ve 10 A var. Eğer elimizde papaz varsa, pas geçmeli miyiz? Belki de, “makinanın kâğıdı da büyük bir olasılıkla papazdır,” deyip, 2 lira artırmalıyız.

Diyelim makinanın kâğıdı a olasılıkla astır.² Demek ki $1 - a$ olasılıkla makinanın papazı var. Eğer a , $1/2$ 'den küçükse, destedeki asların sayısı papazlara göre daha azdır ve dolayısıyla oyunda kazanma şansımız artar. Nasıl oynamalıyız ki oyun başına kazanç ortalamamız, yani beklentimiz artsın?

Elimizde A varsa, hiç kuşku yok ki artırmalıyız. Peki, ya elimizde K varsa? Nasıl oynamalıyız?

Diyelim elimizde K var ve pas geçtik. 1 lira kaybederiz, yani beklentimiz -1 'dir.

Diyelim elimizde K var ve 2 artırdık.

a olasılıkla makinada A vardır ve -3 kazanırız

$1 - a$ olasılıkla makinada K vardır ve 0 kazanırız.

Demek ki 2 artırırsak, beklentimiz,

$$a(-3) + (1 - a)(0) = -3a$$

dır. Beklentimizin negatif bir sayı olması okuru şaşırtmamıştır. Elimizde K olduğundan, oyunun bizim aleyhimize olması gerekir.

Hangi beklenti daha iyidir, daha doğrusu daha az kötüdür? -1 mi yoksa $-3a$ mı? Eğer $-3a > -1$ ise 2 artırmalıyız. Eğer $-3a < -1$ ise pas geçmeliyiz. Eğer $3a = -1$ ise ne yaparsak yapalım önemli değildir. Sonuç olarak,

² Burda a , 0'la 1 arasında bir sayıdır. Matematikte olasılıklar 0'la 1 arasında değişir. %100'ün matematikçesi 1'dir. %25'in matematikçesi $1/4$ 'tür.

Makinaya A gelme olasılığı $1/3$ 'ten fazlaysa,	pas geçmeliyiz	Beklentimiz -1 'dir.
Makinaya A gelme olasılığı, a , $1/3$ 'ten azsa,	2 artırmalıyız	Beklentimiz $-3a$ 'dır.
Makinaya A gelme olasılığı, $1/3$ ise,	istediğimizi yapabiliriz	Beklentimiz -1 'dir.

7) **Oyunu Biraz Değiştirelim.** Seçeneklerimizi ikiden üçe çıkaralım. İstersek pas geçebilelim, istersek 1 artırabilelim, istersek 2 artırabilelim. Makina gene yukardaki kurallara uyacak. Pas geçerse koyduğumuz parayı alacak. 1 lira koyarsak, 1 lira koyacak. 2 lira koyarsak, 2 lira koyacak.

Bu oyunu nasıl oynamalıyız? Kâğıtları saydığımızı da varsayalım, yani öbür oyuncunun eline kaç olasılıkla A, kaç olasılıkla K olduğunu bildiğimizi de varsayalım.

Her şeyden önce elimizde A varsa, kesinlikle 2 artırmalıyız. Çünkü elimizde A varsa kaybedemeyiz, en kötü olasılıkla parayı paylaşıyoruz. Kazandığımızda daha çok para kazanabilmek için, kuralların izin verdiği en yüksek parayı (2 lira) öne sürmeliyiz.

Her zamanki gibi elimizde K olduğunda işler karışıyor. Elimizde K olduğunu varsayalım. Para kazanamayacağımızı biliyoruz. Dolayısıyla 2 artırmanın anlamı yoktur. Eğer illâ artırmak gerekiyorsa 1 artırmalı. Çünkü ne kadar çok artırırsak, o kadar çok kaybederiz ve kazandığımızda 1 lira da artırmış olsak, 2 lira da artırmış olsak 0 lira kazanırız. Kumar terimiyle, “tapi” kalkmak umuduyla artırıyoruz. Bunu matematiksel olarak kanıtlayalım.

Öbür oyuncunun elinde a olasılıkla A, $1 - a$ olasılıkla K olsun. Üç seçeneğimizin beklentilerini teker teker hesaplayalım. Bakalım hangisi daha büyük.

- Pas geçerse beklentimiz -1 'dir.
- 1 artırırsak beklentimiz kaçtır? Hesaplayalım. a olasılıkla makinanın ası olacak ve -2 lira kazanacağız. $1 - a$ olası-

lıkla makinanın papazı olacak ve 0 lira kazanacağız. Demek ki 1 lira artırdığımızda beklentimiz $a(-2) + (1 - a)0 = -2a$ 'dır.

- 2 artırırsak beklentimiz kaçtır? a olasılıkla makinanın ası olacak ve -3 lira kazanacağız. $1 - a$ olasılıkla makinanın papazı olacak ve 0 lira kazanacağız. Demek ki 1 lira artırdığımızda beklentimiz $-3a$ 'dır.

Bu üç sayıdan (-1 'den, $-2a$ 'dan ve $-3a$ 'dan) hangisi daha büyüktür? a en az 0 olduğundan, $-2a$, $-3a$ 'dan daha büyüktür. Demek ki 2 artırmak yerine 1 artırmalıyız. Şimdi geriye kalan -1 ve $-2a$ sayılarını karşılaştıralım. Hangisi daha büyüktür? Eğer $a < 1/2$ ise, $-2a$ daha büyüktür. Demek ki bu şıkta 1 artırmalıyız. Eğer $a > 1/2$ ise, -1 daha büyüktür. Demek ki bu şıkta pas geçmeliyiz. Eğer $a = 1/2$ ise, ister pas geçelim ister 1 artıralım (yeter ki 2 artırmayalım), beklentimiz -1 'dir. Sonuç olarak,

$$\begin{array}{lll} a \leq 1/2 \text{ ise} & 1 \text{ artıralım.} & \text{Beklentimiz } -2a \text{ 'dır.} \\ a \geq 1/2 \text{ ise} & \text{pas geçelim.} & \text{Beklentimiz } -1 \text{ 'dir.} \end{array}$$

8) Blöf Yapmalı mı? Yukarda makinaya seçenek vermedik. Bu kez makinaya da seçenek vereceğiz. Bu yüzden artık ikinci oyuncuya makina demeyeceğiz. İkinci oyuncu kişiliği olan bizim gibi bir insan olacak.

Bu paragrafta ele alacağımız oyunun kuralları şöyle: Her iki oyuncu da oyunun başında ortaya birer lira koyar ve her ikisine de içinde hemen hemen eşit sayıda as ve papaz bulunan büyük bir desteden birer kâğıt dağıtılır. Destede A ve K'dan başka kâğıt yok. Gene birinci oyuncuyuz. İster pas geçeriz ister 2 lira artırırız. Pas geçerse ikinci oyuncu ortadaki 1 lirayı alır. Buraya değin oyunumuzun kuralları ilk oyununki gibi. Bundan sonrası değişik olacak. Eğer 2 lira artırırsak ikinci oyuncu ya pas geçebilir ya da 2 liramızı görüp elini açar. İkinci oyuncunun artırmaya hakkı yok.

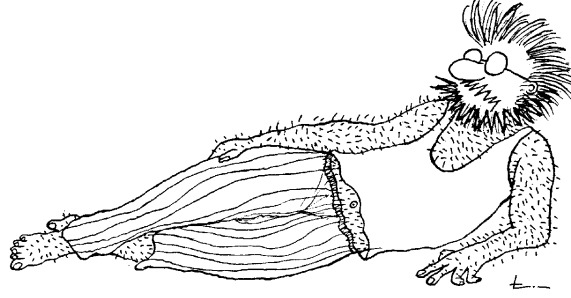
Bu oyunda bizim ve ikinci oyuncunun en iyi stratejisinin ne olduğu sorusunu sorabiliriz.

Oyunu biraz inceleyelim. Elimizde A varsa, her zamanki gibi artırmalıyız. Bundan, yazının bu aşamasında kuşkumuz olmamalı.

İkinci oyuncunun elinde A varsa ve artırmışsak, ikinci oyuncu 2 liramızı görmeli, çünkü A ile kaybedemez. Bundan da kuşkumuz olmamalı.

Ya bizim elimizde K varsa? Elimizde K varsa blöf yapabiliriz!

Elimizde K varsa, 2 lira artırarak ikinci oyuncuya elimizde as olduğuna inandırabiliriz. Ama, hep blöf yaparsak, ikinci oyuncu hep blöf yaptığımızı anlayabilir. Dolayısıyla her



zaman değil arada bir blöf yapmalıyız, diye düşünebiliriz. Kaç oyunda bir elimizde papazla blöf yapmalıyız? Yani kaç olasılıkla? Ve ikinci oyuncu blöfümüzü (elinde papazla) görmeli mi?

Soru zor... Soru zor ama oyunun çözümlemesini (analizini) yaptığımızda bu zor sorunun kaybolduğunu göreceğiz.

Önce olasılıkları bir yana bırakalım ve stratejileri gözden geçirelim. Her oyun öncesi olası dört stratejimiz var:

- 1) Elimizde A da olsa K da olsa artırabiliriz.
- 2) Elimizde A da olsa K da olsa artırmayabiliriz.
- 3) Elimizde A olduğunda artırabiliriz.
- 4) Elimizde K olduğunda artırabiliriz.

Eğer artırmazsak, yani pas geçerse, ikinci oyuncunun bir seçeneği yok, 1 lirayı cebine indirir. Artırdığımızdaysa ikinci oyuncunun da dört stratejisi vardır:

- 1) Hep görebilir.
- 2) Hiç görmez.
- 3) Elinde A olduğunda görür yalnızca.
- 4) Elinde K olduğunda görür yalnızca.

Demek ki oyunda toplam $4 \times 4 = 16$ strateji var. Bu stratejilerin herbirinin beklentisini kocaman bir tabloyla gösterelim:

	Hep kabul et	Hiç kabul etme	A ile kabul et	K ile kabul et
Hep artır	AA 0 AK 3 KA -3 KK 0 Beklenti 0	AA 1 AK 1 KA 1 KK 1 Beklenti 1	AA 0 AK 1 KA -3 KK 1 Beklenti -1/4	AA 1 AK 3 KA 1 KK 0 Beklenti 5/4
Hiç artırma	AA -1 AK -1 KA -1 KK -1 Beklenti -1	AA -1 AK -1 KA -1 KK -1 Beklenti -1	AA -1 AK -1 KA -1 KK -1 Beklenti -1	AA -1 AK -1 KA -1 KK -1 Beklenti -1
A ile artır	AA 0 AK 3 KA -1 KK -1 Beklenti 1/4	AA 1 AK 1 KA -1 KK -1 Beklenti 0	AA 0 AK 1 KA -1 KK -1 Beklenti -1/4	AA 1 AK 3 KA -1 KK -1 Beklenti 1/2
K ile artır	AA -1 AK -1 KA -3 KK 0 Beklenti -5/4	AA -1 AK -1 KA 1 KK 1 Beklenti 0	AA -1 AK -1 KA -3 KK 1 Beklenti -1	AA -1 AK -1 KA 1 KK 0 Beklenti -1/4

Bu tablonun nasıl hesaplandığını anlatalım. Sıralar her zamanki gibi bizim stratejilerimizi gösteriyor. Sütunlar da ikinci oyuncunun stratejilerini. Her iki oyuncunun da elinde as varsa AA yazdık. Elimizde A, ikinci oyuncuda K varsa, AK yazdık. Üçüncü sıranın dördüncü sütununu ele alalım. Üçüncü sırada olduğumuzdan, biz elimizde A olduğunda 2 lira artırıyoruz. Eğer elimizde K varsa pas geçiyoruz. Dördüncü sütunda olduğumuzdan, ikinci oyuncu elinde K olduğunda görüyor ve A olduğunda pas geçiyor. Eğer her ikimizin de elinde A varsa, yani AA şıkkındaysak, elimizde A olduğundan 2 artırırız ve ikinci oyuncu pas geçer. Dolayısıyla 1 kazanırız. Bu yüzden AA'nın yanına 1 yazdık. Eğer elimizde A, ikinci oyuncuda K varsa, 2 lira artırırız, ikinci oyuncu kabul eder ve 3 lirasını alırız. Dolayısıyla AK'nin yanına 3 yazdık. Eğer elimizde K varsa, pas geçeriz ve 1 lira kaybederiz. Bu yüzden KA ve KK'nin yanına -1 yazdık. En aşağıya da beklentiği yazdık. Üçüncü sırayla dördüncü sütunun kesiştiği oyunun beklentisi

$$(1/4)(1) + (1/4)(3) + (1/4)(-1) + (1/4)(-1) = 1/2$$

dir. (As ve papazların eşit dağıldığını varsaydığımızı unutmayın.)

Tablodaki hesapları kaldırıp yalnızca beklentileri bırakalım:

	Hep	Hiç	A ile	K ile
Hep	0	1	-1/4	5/4
Hiç	-1	-1	-1	-1
A ile	1/4	0	-1/4	1/2
K ile	-5/4	0	-1	-1/4

Bu son tablo oyunu özetliyor. Bize gereken de bu özet zaten. Sıralar, birinci oyuncunun seçebileceği çeşitli stratejiler. Sütunlar, ikinci oyuncunun seçebileceği çeşitli stratejiler. Seçilen sırayla seçilen sütunun kesişimindeki sayı, o stratejilerle oynandığında, oyun başına birinci oyuncunun kazancını gösteriyor. Örneğin, elimizde A ile artırmaya ve K ile pas geçmeye karar verdiğimizde ve ikinci oyuncu yalnız A ile görmeye karar verdiğinde, üçüncü sırayla üçüncü sütunun kesiştiği oyundayız. Beklentimiz $-1/4$ 'tür. Yani her iki oyuncu bu stratejilerle 1000 kez oynarlarsa, şanslar eşit olduğunda, birinci oyuncu 250 lira kaybeder, ikinci oyuncu 250 lira kazanır.

Biz birinci oyuncuyuz. Dolayısıyla sıralardan birini seçeceğiz. Bu seçim, stratejimizi belirleyecek. İkinci oyuncu sütunlardan birini seçecek, yani stratejisini belirleyecek. Bu seçimi birbirimizden gizli yapacağız. İkimiz de seçimlerimizi (stratejilerimizi) birbirimizden gizli bir kâğıda yazacağız. Sonra seçimlerimizi açıklayacağız. Her ikimiz de üçüncü stratejiyi seçmişsek, biz $1/4$ lira kaybedeceğiz, öbür oyuncu $1/4$ lira kazanacak. Oyunu bir kez değil, birçok kez oynayacağız. Ve her oyunda seçimimizi değiştirebiliriz. Yalnız dikkatli olmalı, eğer $5/4$ lira kazanmak umuduyla hep birinci sırayı seçersek, ikinci oyuncu stratejimizi anlayabilir ve üçüncü sütunu seçer. Ve böylece $5/4$ kaybedeceğine $1/4$ kazanır.

Biz, birinci oyuncu olarak, hangi stratejiyi, yani hangi sırayı seçmeliyiz?

Artık iskambil kâğıdı kullanmadan poker oynadığımızı da dikkatinizi çekerim!

Yazının süreğini okumadan önce bu oyunu bir arkadaşınızla yirmi otuz kez oynamanızı öneririm. Zamanla doğru stratejiyi keşfedeceğinizden kuşum yok. Böylece aşağıda yazdıklarımı daha iyi anlayacaksınız, hatta okumadan kendiniz keşfedeceksiniz.

İkinci sıra pek akıllı bir seçime benzemiyor. Çünkü ikinci sırayı seçersek (yani hep pas geçmeyi seçersek), öbür oyuncunun seçimi ne olursa olsun 1 lira kaybedeceğiz. İkinci sıra gerçekten de iyi bir seçim değildir. Ama iyi bir seçim olmamasının daha matematiksel bir nedeni vardır: ikinci sıranın her sayısı bir üstteki sayıdan daha küçüktür. Yani birinci sıra bize her zaman ikinci sıradan daha fazla para kazandırır (ya da daha az kaybettirir.) Dolayısıyla birinci sırayı seçmek ikinci sırayı seçmekten daha avantajlıdır. Demek ki hiçbir zaman ikinci sırayı seçmemeliyiz. Dolayısıyla ikinci sırayı oyundan silebiliriz.

Üçüncü sırayla dördüncü sırayı karşılaştırsak, üçüncü sıranın daha işimize geldiği ortaya çıkar. Üçüncü sıranın her sayısı bir alttaki sayıdan daha büyük. Dolayısıyla, dördüncü sırayı seçmektense üçüncü sırayı seçmeliyiz. Dördüncü sırayı da oyundan silebiliriz. Demek ki iki sıralı, dört sütunlu bir oyun kaldı önümüzde:

	Hep	Hiç	A ile	K ile
Hep	0	1	-1/4	5/4
A ile	1/4	0	-1/4	1/2

Şimdi ikinci oyuncunun nasıl düşündüğüne bakalım. İkinci oyuncu, akıllı bir yaratık olduğumuzu biliyor. (Bilmiyorsa oyun sonunda öğrenir!) Yani ikinci ve dördüncü sıraları seçmeyeceğimizi, bu sıraları oyundan attığımızı biliyor. Demek ki ikinci oyuncunun da önünde yukardaki iki sıralı dört sütunlu oyun var. (Negatif sayılar, ikinci oyuncunun kazanacağını gösteriyor.) İkinci oyuncu bu tabloyu şöyle bir gözden geçirince,

üçüncü sütunun kendisi için en avantajlı sütun olduğunu anlayacaktır. Her şeyden önce üçüncü sütunu seçerse kaybetmesine olanak yoktur: birinci oyuncu ne seçerse seçsin ikinci oyuncu bu sütunu seçerse 1/4 lira kazanacaktır. Ama bunun da ötesinde, üçüncü sütunun her sayısı bulunduğu sıranın en küçük sayısı. Örneğin üçüncü sütunun her iki sayısı da bir sonraki sayılardan daha küçük. (Küçük sayıların ikinci oyuncunun işine geldiğini unutmayın.) İkinci oyuncu doğal olarak üçüncü sütunu dördüncü sütuna yeğler. Aynı şey öbür sütunlar için de doğru. Dolayısıyla ikinci oyuncu birinci, ikinci ve dördüncü sütunları oyundan atar. Geriye yandaki oyun kalır.

	A ile
Hep	-1/4
A ile	-1/4

Koca poker oyunu ne hale geldi!

Şimdi artık en iyi stratejiler belli olmuştur: Birinci oyuncu ya hep ya da yalnız A ile artırmalıdır. Dilerse eline bakmadan hep artırsın. Dilerse elindeki kâğıt A ise artırsın. Dilerse bu iki stratejiden birini seçmek için yazıtura atsın. Bu iki stratejisini değiştirerek oynayabilir. Arada bir hep artırır, arada bir yalnız A ile artırır. Sonuç olarak birinci oyuncu, elinde as varsa hep artırsın; K varsa, dilediğini yapsın. İkinci oyuncu blöf yaptığını anlasa da anlamasa da önemi yok. Oyunun beklentisi değişmez.

İkinci oyuncu, yalnız elinde A varsa, birinci oyuncunun 2 lirasını görmelidir, yoksa pas geçmelidir.

Sonuç olarak, bu stratejiler her iki oyuncunun en iyi stratejileridir. Bu en iyi stratejilerle oynandığında, birinci oyuncu oyun başına ortalama 1/4 lira kaybeder, ikinci oyuncu oyun başına 1/4 lira kazanır. Eğer birinci oyuncu başka strateji seçerse, bunu arada bir yapsa bile, 1/4 liradan daha fazla kaybeder (şanslar ve as ve papaz dağılımı eşitse.) İkinci oyuncu başka strateji seçerse, 1/4'ten daha az kazanır, hatta kaybedebilir bile.

Gördüğümüz gibi, bu oyun ikinci oyuncudan yana. Bunun böyle olması gerektiğini poker oyuncularını bilirler: En son konuşan oyuncunun avantajı!