

Ramsey Teoremi

Bir odada sonsuz sayıda insanın bulunduğunu varsayalım. Bu odada bulunan herhangi iki kişi birbirlerini ya tanırlar ya da tanımazlar. Burası belli. Yanıtı belli olmayan soru şu: Bu odadan, öyle sonsuz sayıda insan seçebilir miyiz ki, bu seçtiğimiz insanların ya hepsi birbirini tanısin ya da kimse kimseyi tanımasın?

Yanıt, okurun da tahmin ettiğini sandığım gibi, “evet, seçebiliriz”dir. Bu, Ramsey adlı bir matematikçinin kanıtladığı çok ünlü bir teoremin sonucudur. Ramsey Teoremi bugün dallanıp budaklanmış, matematikte *Ramsey Kuramı* adında başlıbaşına bir dal olmuştur. Bu yazıda Ramsey’in bu ünlü teoremini kanıtlayacağız.

Önce yukardaki soruyu matematikselleştirelim. Her kişiyi bir nokta olarak gösterelim. Eğer iki kişi birbirini tanıyorsa, bu iki insana eşdüşen noktaları kırmızı bir çizgiyle birleştirelim. Eğer iki kişi birbirini tanımıyorsa, bu iki kişiye eşdüşen noktaları mavi bir çizgiyle birleştirelim. Her ikisi kırmızı ya da mavi çizgiyle birleştirilmiş sonsuz tane nokta elde ettik. Bu noktalar arasından, hep aynı renkle (ya hep kırmızıyla ya hep maviyle) birleştirilmiş sonsuz tane nokta bulacağız.

Kanıtımıza başlıyoruz.

Kanıtımızı iki aşamada gerçekleştireceğiz. Birinci aşamada öyle sonsuz tane

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots$

noktası bulacağız ki, **her a_i kendisinden sonra gelen**

$a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, \dots$

noktalarıyla aynı renk çizgiyle (ya hep kırmızı, ya hep mavi çizgiyle) bağlanmış olacak.

Birinci noktayı (a_0 'ı) seçmek kolay. Herhangi bir a_0 noktası işi görür. a_1, a_2, a_3, \dots noktalarını biraz daha dikkatli seçeceğiz. Bu a_1, a_2, a_3, \dots noktalarını öyle seçmeliyiz ki, a_0 noktası bu noktalarla hep aynı renk çizgiyle bağlanmış olsun.

a_0 noktası, (kişileri simgeleyen) öbür noktalarla ya kırmızı ya da mavi bir çizgiyle bağlanmıştır. Sonsuz tane nokta olduğundan ve yalnızca iki renk bağlantı olduğundan, a_0 'ın aynı renk çizgiyle bağlandığı sonsuz tane nokta vardır. a_0 'ın hep aynı renk çizgiyle bağlandığı sonsuz bir nokta kümesi alalım. Bu kümeye A_0 diyelim. Demek ki,

a_0, A_0 'ın noktalarıyla hep aynı renk çizgiyle bağlanmıştır.

Bunu aklımızda tutalım. a_1, a_2, a_3, \dots noktalarını bu A_0 kümesinde seçeceğiz. Böylece a_0 noktası istediğimiz koşulu sağlamış olacak.

Şimdi A_0 'dan herhangi bir a_1 noktası alalım. a_1 noktası, A_0 'ın öbür noktalarına ya kırmızı ya da mavi bir renkle bağlanmıştır. A_0 'da sonsuz tane nokta olduğundan ve yalnızca iki rengimiz olduğundan, A_0 kümesinde, a_1 'in aynı renk çizgiyle bağlandığı sonsuz tane nokta vardır. Yani, ya

$\{a \in A_0 : a_1$ noktası a 'yla kırmızı bir çizgiyle bağlanmış} kümesi, ya da

$\{a \in A_0 : a_1$ noktası a 'yla mavi bir çizgiyle bağlanmış} kümesi sonsuzdur. Bu kümelerden sonsuz olanına A_1 adını verelim. Demek ki,

a_1, A_1 'in noktalarıyla hep aynı renk çizgiyle bağlanmıştır.

a_2, a_3, a_4, \dots noktalarını A_1 'de seçeceğiz ve böylece yukardaki koşul a_1 için sağlanmış olacak.

Şimdi A_1 'den herhangi bir a_2 noktası alalım. a_2 noktası A_1 'in öbür noktalarıyla ya kırmızı ya da mavi bir çizgiyle bağlanmıştır. A_1 'de sonsuz nokta olduğundan ve yalnızca iki rengimiz olduğundan, A_1 'de, a_1 'in hep aynı renkle bağlandığı sonsuz tane nokta vardır. Bir başka deyişle, ya

$\{a \in A_1 : a_2 \text{ noktası } a \text{'yla kırmızı bir çizgiyle bağlanmış}\}$
kümesi, ya da

$\{a \in A_1 : a_2 \text{ noktası } a \text{'yla mavi bir çizgiyle bağlanmış}\}$
kümesi sonsuzdur. Bu kümelerden sonsuz olanına A_2 adını verelim. Demek ki,

**a_2, A_2 'nin noktalarıyla hep aynı renk
çizgiyle bağlanmıştır.**

a_3, a_4, a_5, \dots noktalarını A_2 'de seçeceğiz ve böylece yukardaki koşul a_2 için sağlanmış olacak.



Şimdi A_2 'den herhangi bir a_3 noktası alalım. Yukarda yaptıklarımızı a_3 ve A_2 için yapalım. A_2 'nin içinde, öyle bir sonsuz A_3 kümesi bulalım ki, a_3 , A_3 'ün her noktasıyla hep aynı renk çizgiyle bağlanmış olsun.

Bunu böylece sonsuza değin sürdürebiliriz. Demek ki, öyle

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots$$

noktaları bulabiliriz ki, her nokta kendisinden sonra gelen noktalarla aynı renk çizgiyle bağlanmış olsun.

Kanıtın birinci aşamasını tamamladık. Sıra ikinci aşamaya geldi.

Yukarda dikkatle seçtiğimiz bu $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ noktalarının herbirine bir renk vereceğiz. Eğer bir nokta kendisinden sonra gelen noktalarla hep kırmızı çizgiyle bağlanmışsa, o noktaya **kırmızı nokta** diyeceğiz. Yoksa, o noktaya **mavi nokta** diyeceğiz. Örneğin, eğer a_0 noktası, kendisinden sonra gelen a_1, a_2, a_3, \dots noktalarıyla hep kırmızı bir çizgiyle bağlanmışsa, a_0 noktasına kırmızı nokta diyeceğiz. Eğer a_5 noktası kendisinden sonra gelen a_6, a_7, a_8, \dots noktalarıyla hep mavi çizgiyle bağlanmışsa, a_5 noktasına mavi nokta diyeceğiz.

Sonsuz tane nokta olduğundan ve yalnızca iki rengimiz olduğundan,

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$$

noktalarından sonsuz tanesi aynı renk noktadır. Bir başka deyişle, ya kırmızı noktalar kümesi ya da mavi noktalar kümesi sonsuzdur. Matematiksel olarak söyleyecek olursak,

ya $\{a_i : a_i \text{ kırmızı bir nokta}\}$ ya da $\{a_i : a_i \text{ mavi bir nokta}\}$ kümesi sonsuzdur. İki küme birden de sonsuz olabilir, ama en azından birinin sonsuz olduğunu biliyoruz. İki kümeden sonsuz olanını alalım. Öbür noktaları atalım. Noktalarımızı yeniden adlandırarak, her noktanın aynı renk olduğunu varsayabiliriz, diyelim hepsi kırmızı. Demek ki,

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

noktalarının herbirinin kırmızı olduğunu varsayıyoruz. Bu kü-

meden iki nokta alalım: a_i ve a_j . Diyelim i, j 'den daha küçük. a_i , kırmızı bir nokta olduğundan, a_i noktası a_j noktasıyla kırmızı bir çizgiyle bağlanmıştır. Demek ki yukardaki sonsuz nokta birbirleriyle aynı renk çizgiyle (kırmızıyla) bağlanmıştır. Ramsey'in teoremi kanıtlanmış oldu.

Elbette iki renkle yaptığımızı üç renkle, dört renkle, genel olarak sonlu renkle de yapabiliriz. Ramsey'in asıl teoremi de zaten genel olarak n renk içindir:

Ramsey Teoremi: n tane renk ve sonsuz tane noktamız olsun. Her iki nokta, bu n renkten bir çizgiyle birleştirilmiş olsun. O zaman, her iki noktası aynı renk çizgiyle birleştirilmiş sonsuz tane nokta vardır.



*Türkiye'nin sessiz kahramanlarından
özveriili öğretmen Osman Karakök'e*