Fermat Ne Biliyordu? (I)

"Son Teorem" Teorem Oldu En Sonunda başlıklı yazıda, 350 yıllık bir arayıştan sonra ancak daha yeni kanıtlanan Fermat'nın "Son Teoremi"nden söz etmiştik. 350 yıllık bir arayıştan sonra... Bir iki yıl değil, beş on yıl da değil, 350 yıl... Bir kuşak, iki kuşak değil, on kuşak... Biraz düşünmek gerekiyor. 350 matematik yılı ne demektir? 350 yıllık bir sabır, 350 yıllık bir uğraş ne demektir? Bir karınca gibi, hiç yılmadan, gıdım gıdım, adım adım, kıyısından köşesinden parçalar koparak... Başlangıçta bilinse 350 yıl sonra her şeyin açıklığa kavuşacağı! Bilinmiyor ki! Nasıl bilinsin? Hiç de bulunamayabilirdi Fermat'nın Son Teoremi'nin kanıtı. Üstelik yol gösteren de yok. Karanlıkta yol alınıyor, hangi yolun izlenmesi gerektiği bilinmeden. Bıkmadan, usanmadan, bezmeden, karamsarlığa kapılmadan, inatla, sabırla, hınçla, ve her gün, ve her gece, ve uykularında, ve yemek yerken, ve yürürken, ve çocuklarıyla oynarken, durmadan düşünüyor amatör ve profesyonel matematikçiler. Gerçeğe erişmek kolay değil. Kimbilir kaç kilo mürekkep, kaç ton kâğıt harcamışlardır, kimbilir kaç kalem, kaç tırnak kemirmişlerdir, kaç mum eritmiş, kaç ampul patlatmışlardır? Kimbilir kaç kez başarıya ulaştıklarını sanıp utku çığlığı atmışlardır? Kimbilir kaç kez yanıldıklarını ayrımsayıp masalarını yumruklamışlardır? Ve kimbilir bu matematikçilerden kaçını bugün biliyoruz? Çoğu hiç tanınmamıştır bile, bütün bir yaşam boyu bir adım ilerleyememişlerdir kanıtta.

Önermeyi anımsatayım:

Fermat'nın Son Teoremi. *Eğer* $n \geq 3$ *bir tamsayıysa,*

$$x^n + y^n = z^n$$

denkleminin pozitif tamsayılarda çözümü yoktur.

Her ne kadar bu önermeye "Fermat'nın Son Teoremi" deniyorsa da, Fermat'nın bu önermeyi kanıtlayıp kanıtlamadığı kuşkulu. "Son Teorem" Teorem Oldu En Sonunda başlıklı yazıda da sözünü ettiğimiz gibi, Fermat, 1637'de okuduğu bir kitabın sayfa kenarına, bu önermenin "harika bir kanıtını" bulduğunu yazar. Ancak, "kanıt için sayfa kenarında yeterince yer yok" diye de ekler. 1993 yazında Andrew Wiles adında bir matematikçi önermeyi kanıtladığını duyurdu dünyaya.

Wiles'ın önermeyi kanıtladığı duyulmadan hemen önce, önermenin 4 milyondan küçük bütün n sayıları için doğru olduğu biliniyordu. Bu yüzden matematikçilerin büyük çoğunluğu önermenin doğruluğundan kuşku duymuyorlardı. Gene de önerme kanıtlanmalıydı. Kanıt matematiğin özüdür, hatta olgudan çok olgunun kanıtı önemlidir. Gökyüzünden bir ses önermenin doğruluğunu fısıldasa bile, matematikçiler önermeyi kanıtlamak zorundadırlar.

Fermat'nın denkleminin 4 milyondan küçük sayılarla bir çözümü olmayabilir, ama - ne belli? - daha büyük sayılarla denklem çözülebilir belki.

Euler (1707-1783),

$$x^4 + y^4 + z^4 = t^4$$

denkleminin pozitif tamsayılarda çözümü olmadığını sanıyordu. 1987'ye değin bu sanının doğruluğu yanlışlığı anlaşılamadı. Bilgisayarlarda yapılan her deneme sonuçsuz kaldı. 1987'de

Noam Elkies bu denklemin (birbirlerine orantılı olmayan) sonsuz tane çözümü olduğunu gösterdi. En küçük çözüm şu:

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4.$$

Görüldüğü gibi, Fermat denklemine benzeyen bu denklemin küçük sayılarda çözümü yok ama büyük sayılarda var. Bu gibi sürprizlerle karşılaşmayacağımızdan emin olabilmemiz için, ama her şeyden önce matematiğin ve insan zekâsının onuru için, Fermat'nın teoremi kanıtlanmalıdır[1].

1980'lerde Fermat'nın teoreminde çok önemli bir gelişme oldu. Şu teorem kanıtlandı:

Teorem. *$n \geq 3$ sabit bir tamsayı olsun. $x^n + y^n = z^n$ denkleminin pozitif tamsayılarda en fazla sonlu tane (sıfır tane de olabilir) çözümü vardır*[2].

Yazının bundan sonraki bölümünde Fermat'nın bildiğinden emin olduğumuz bilgileri açıklayacağım.

Önce $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini ele alalım. Fermat'nın teoremi bu denklemin çözümünün olmadığını söylemiyor. Nitekim denklemin çözümü var. Örneğin,

$$9144^2 + 14833^2 = 17425^2.$$

Nasıl buldum bu eşitliği? İşte matematiğin gücü ve güzelliği burda. Hesaplamaya gerek kalmadan, bu ve bunun gibi bütün eşitlikleri elde edebiliriz. $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini sağlayan daha küçük sayılar da vardır:

---

1 1 Nisan 1994'te Noam Elkies'in Fermat'nın denklemini çözdüğü, yani Fermat teoreminin yanlış olduğu duyuruldu matematik çevresinde. Bunun bir 1 Nisan şakası olduğu birkaç gün sonra anlaşıldı! Nisan şakasını en iyi yutanların arasında olmalıyım, çünkü yanlış haberi alır almaz erişebildiğim herkese yaydım!

2 Sıfır sonlu bir sayıdır. Dolayısıyla bu teorem Fermat'nın teoremiyle çakışmaz. Bu teorem G. Faltings tarafından 1987'de kanıtlanmıştır. Aslında Faltings'in kanıtladığı teorem çok daha genel bir teoremdir. Yukardaki önerme bu genel teoremin çok özel bir durumudur.

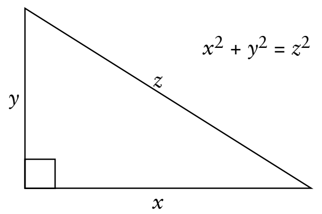
3^2	+	4^2	=	5^2
5^2	+	12^2	=	13^2
7^2	+	24^2	=	25^2
8^2	+	15^2	=	17^2

Babilliler bu eşitlikleri biliyorlardı. İÖ 1900-1600 yılları arasında kazıldığı anlaşılan bir Babil taş tabletinde bunun gibi on beş eşitlik vardır. Babilliler büyük bir olasılıkla

$$(2pq)^2 + (p^2 - q^2)^2 = (p^2 + q^2)^2 \qquad (1)$$

eşitliğini de biliyorlardı[3]. Bu eşitlikte p ve q yerine iki sayı koyarsak, $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini sağlayan sayılar buluruz. Örneğin, $p = 127$ ve $q = 36$ olarak aldığımızda, yukardaki $9144^2 + 14833^2 = 17425^2$ eşitliğini buluruz.

$x^2 + y^2 = z^2$ eşitliğini sağlayan sayılara ***Pisagor üçlüleri*** adı verilir. Çünkü Pisagor'un ünlü teoremine göre, bir diküçgenin dikaçısını oluşturan iki kenarın karelerinin toplamı, üçüncü kenarın karesine eşittir.



Her Pisagor üçlüsü, üç kenarı da tamsayı uzunluğunda olan bir diküçgen verir. Bunun tersi de doğrudur: Üç kenarı da tamsayı uzunluğunda olan her diküçgen bir Pisagor üçlüsü verir.

$x^2 + y^2 = z^2$ eşitliğini sağlayan tüm sayılar, yani tüm Pisagor üçlüleri bulunabilir mi? Evet. Eski Yunanlı Öklid İÖ 300 yılında aşağıdaki teoremi kanıtlamıştır.

---

3 Babil taş tabletindeki eşitliklerden biri de $4961^2 + 6480^2 = 8161^2$ dir! (1) eşitliği bilinmeden bu eşitliğin bulunabilmesi oldukça zor. Bu yüzden Babillilerin (1) eşitliğinden haberli oldukları sanılıyor. Kaldı ki Babilliler ikinci dereceden denklemleri çözmesini biliyorlardı. (1) eşitliğini de bilmeleri gerekir.

Teorem 1. *Gerekirse x'le y'nin yerlerini değiştirirsek,* $x^2 + y^2 = z^2$ *denkleminin tüm çözümleri şöyle elde edilir*: *öyle* p, q, d *sayıları vardır ki*

$$x = 2dpq$$
$$y = d(p^2 - q^2)$$
$$z = d(p^2 + q^2)$$

dir[4].

Artık, $x^2 + y^2 = z^2$ eşitliğini sağlayan tüm tamsayıları bulabiliriz. Birkaçını bulalım (hep $d = 1$ alacağız.)

p	q	$x = 2pq$	$y = p^2 - q^2$	$z = p^2 + q^2$	$x^2 + y^2 = z^2$
2	1	4	3	5	4 + 3 = 5
3	2	12	5	13	12 + 5 = 13
4	1	8	15	17	8 + 15 = 17
4	3	24	7	25	24 + 7 = 25
5	2	20	21	29	20 + 21 = 29
5	4	40	9	41	40 + 9 = 41
6	1	12	35	37	12 + 35 = 37
6	5	60	11	61	60 + 11 = 61

Yukarda, ortak bölenleri olmayan ve yalnızca biri çift olan p ve q sayılarını aldık.

Şimdi $x^4 + y^4 = z^4$ denklemine gelelim. Bu denklemin pozitif doğal sayılarda çözümü olmadığını Fermat kanıtlamıştır. Kanıt, birinci teoremi ve Sonsuz İniş ve Sonsuz Çıkış başlıklı yazıda (sayfa 63) sözünü ettiğimiz sonsuz iniş yöntemini kullanmıştır. Aslında Fermat daha genel bir teorem kanıtlamıştır:

4 Bu teoremle ilgili iki önemli noktaya değinmek istiyorum. 1) Formüllerde $d = 1$ alındığında (1) eşitliği bulunur. 2) Eğer x, y ve z sayılarının ortak böleni olmasını istemiyorsak, $d = 1$ almamız gerekir. Bu yetmez ama. p ve q sayılarının da ortak bölenlerinin olmaması gerekir. Bu da yeterli değildir, ayrıca p ve q sayılarından biri çift, biri tek olmalı. Nitekim, p ve q sayılarının her ikisi birden tek olduğunda, $p^2 - q^2$ ve $p^2 + q^2$ sayıları çifttir, dolayısıyla x, y ve z sayıları da çifttir ve ikiye bölünürler.

Teorem 2. *$x^4 + y^4 = z^2$ denkleminin, dolayısıyla $x^4 + y^4 = z^4$ denkleminin de, pozitif tamsayılarda çözümü yoktur.*

İkinci teoremin ilginç bir uygulaması vardır: Fermat'nın teoremi salt 4 için değil, 4'e bölünen tüm sayılar için doğrudur. Örneğin, (a, b, c) sayıları, $x^8 + y^8 = z^8$ denkleminin bir çözümü olsaydı, (a^2, b^2, c^2) sayıları $x^4 + y^4 = z^4$ denkleminin bir çözümü olurdu. Oysa Teorem 2 bu son denklemin çözümünün olmadığını söylüyor. Demek ki $x^8 + y^8 = z^8$ denkleminin de çözümü yoktur.

Aynı türden bir akıl yürütme, Fermat'nın teoremini asal n sayıları[5] için kanıtlamanın yeterli olduğunu gösterir. İkiden büyük ilk asal sayı 3. Fermat, teoremi $n = 3$ için kanıtladığını mektuplarında sık sık yazmıştır ama, çoğu zaman yaptığı gibi, kanıtını açıklamamıştır. Yıllar sonra, İsviçreli matematikçi Euler (1707-1783) $n = 3$ için bir kanıt bulduğunu matematikçi Goldbach'a yazmıştır; kanıtının, $n = 4$ şıkkının kanıtından çok değişik olduğuna dikkati çekip yakın gelecekte genel teoremin kanıtlanacağını sanmadığını eklemiştir. Euler'in 1770'de yayımladığı kanıtında açıklamadığı, karanlık kalmış yerler vardı. Bu açıklanmayan yerlerin doğruluğunu büyük bir matematikçi olan Euler'in bilip bilmediği tartışma konusu. Konuyla ilgili okuduğum kitaplardan, Euler'in düşüncelerinin doğru olduğu, ancak her nedense, her tümcesini açıklamadığı izlenimini edindim. Euler'in kanıtı da sonsuz iniş yöntemini kullanır. Sonsuz iniş yönteminin dışında,

$$\{a + b\sqrt{3} : a, b \text{ tamsayılar}\}$$

karmaşık sayılar kümesinde hangi elemanların bir küp olduğunu (üçüncü güç) bilmek gerekir. Fermat bu kanıtı o çağda bilebilir miydi? Bu yöntemin Fermat'nın çağının çok ilerisinde olduğu bir gerçek. Ama Fermat'nın da çağının çok ilerisinde olduğu bir başka gerçek.

---

5 Kendinden ve 1'den başka sayıya bölünmeyen sayılara asal sayı denir. Örneğin, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 sayıları asaldır. 15 asal değildir, 5'e bölünür.