Matematikte Biçim ve Sezgi Üzerine

Bilindiği gibi, günümüzün matematiği biçimselleştirilebilir. Yani öyle bir yazılım (bilgisayar programı) yapılabilir ki, bir kanıtın doğru olup olmadığı bilgisayara sorulup öğrenilebilir[1]. Böyle bir yazılım yapabilmek için bilgisayara şunları öğretmek gerekir:

- Matematiğin yazıldığı abece (yani alfabe),
- Hangi harf dizilerinin matematiksel tümce oluşturdukları,
- Hangi matematiksel tümcelerin belit olarak kabul edildikleri,
- Çıkarım kuralları.

Burda bu dört maddeyi ayrıntılarıyla açıklamayacağım. Okurun matematik deneyimine ve matematiksel olgunluğuna güvenip kısa geçeceğim.

Abece. Örneğin ♠ simgesi matematikte kullanılmaz ve dolayısıyla matematiğin abecesinde böyle bir simge yoktur. Öte yandan

1 Öte yandan, bilgisayardan bir savı kanıtlamasını ya da o savın yanlış olduğunu göstermesini isteyemeyiz. Bu, apayrı bir sorundur.

$$\forall, \exists, \vee, \wedge, \rightarrow, \in, \subseteq, +, =, \neq, (,), \varnothing, v_1, v_2, v_3, \ldots$$

gibi simgeler matematikte kullanılır ve matematiğin abecesinin harfleri arasındadır.

Her ne denli simge sayımız sonsuz gibi görünüyorsa da, sonlu sayıda simgeyle de yetinebiliriz: v_1 yerine $v|$, v_2 yerine $v||$, v_3 yerine $v|||$ yazarak, v_n simgeleri yerine v ve | simgelerinden oluşan "sözcükler" kullanabiliriz.

Kolaylık sağlayacaksa yeni simgeler de yaratabiliriz. Örneğin, formüllerin daha kolay anlaşılmasını sağlayacaksa, "boşluk" anlamına gelen yeni bir simge yaratabiliriz. "Boşluk" anlamına gelen yeni bir simge yaratmayacağız ve boşluğu özgürce kullanacağız.

Matematiksel Tümce. Yukardaki abecenin harfleriyle matematiksel tümceler yazılır. Örneğin,

$$\forall v_1 \exists v_2 \left(v_1 \subseteq v_2\right)$$

matematiksel bir tümcedir. Öte yandan,

$$\forall \exists = (((v_6 +$$

matematiksel bir tümce değildir. Bilgisayara hangi harf dizilerinin matematiksel tümce oldukları kolaylıkla öğretilebilir. Yani öyle bir yazılım yapılabilir ki, bilgisayara bir simgeler dizisi verildiğinde, bilgisayar sonlu bir zaman içinde, ya "*evet, bu matematiksel bir tümcedir,*" ya da "*hayır, bu matematiksel bir tümce değildir,*" der ve yanıtı doğru olur.

Belitler. Belit, doğruluğu önceden, kanıtsız kabul edilmiş matematiksel tümce demektir. Bir belitin kabul edilip edilmemesi gerektiği felsefi sorunlar yaratabilir. Konumuz felsefe değil ama. Verilen beliti tartışma hakkımız yok. Olsa olsa, bu belitleri kabul eden matematikçinin teoremini önemli bulmaz ve okumayız. Örneğin,

$$\forall v_1 \forall v_2 \left(v_1 = v_2 \rightarrow v_2 = v_1 \right)$$

bir belittir. Ote yandan,

$$\exists v_1 \left(v_1 \in v_1 \right)$$

bir belit değildir. Bilgisayara hangi matematiksel tümcelerin belit oldukları belirtilerin listesi verilerek kolaylıkla öğretilir.

Çıkarım Kuralları. Matematikte belitlerden yola çıkarak yeni tümceler kanıtlarız. Bu kanıtlanmış tümcelere teorem denir. Yeni tümce elde etme, yani kanıtlama yöntemlerine çıkarım kuralları denir.

Örneğin, eğer a ve $a \to b$ tümceleri daha önce kanıtlanmış teoremlerse, b tümcesini de teorem olarak kabul ederiz[2].

Çıkarım kuralları olmadan yeni teorem üretilemez, belitlerle yetinilmek zorunda kalınır, ki o zaman da matematik olmaz.

Çıkarım kuralları da bilgisayara kolaylıkla ögretilir.

Kanıt. Bir kanıt sonlu tane matematiksel tümceden oluşur, yani bir tümce listesidir. Tümceler şu iki kurala uymak zorundadır: Her tümce

1) ya bir belittir

2) ya da kendisinden önce yer alan iki tümceden modus ponens yoluyla elde edilmiştir, yani eğer tümce b ise, b'den önce listede $a \to b$ ve a tümceleri vardır.

Teorem'in Tanımı. Bir kanıtın son tümcesine teorem adı verilir.

Diyelim yukardaki aşamalardan geçtik ve kanıtların doğru mu yanlış mı olduğuna karar verebilen bir yazılım hazırladık. Sonra bir teorem kanıtladık, daha doğrusu kanıtladığımızı sa-

2 Bu çıkarım kuralına *Modus ponens* adı verilir.

nıyoruz. Çünkü yanlış yapıp yapmadığımızdan henüz emin değiliz. Teoremi ve kanıtını bilgisayara verelim ve bilgisayarın yanıtını bekleyelim. Biçimsel olarak kanıt, sonlu bir matematiksel tümceler dizelgesidir; ve bu tümcelerin herbiri ya bir belittir ya da dizelgenin daha önceki tümcelerinden çıkarım kuralları kullanılarak yaratılmıştır. Dizelgenin son tümcesiyse kanıtladığımız teoremdir. Böyle bir dizelgeyi bilgisayara verelim. Bir zaman sonra bilgisayar, "Bu doğru bir kanıttır" ya da "Bu yanlış bir kanıttır," yanıtını verir.

İşler bu kadar kolay olsaydı matematikte yanlış yapılmazdı. Oysa her matematikçinin bildiği gibi, matematikçi doğru kanıttan çok yanlış kanıt verir.

Yukarda sözünü ettiğimiz yazılım gerçekten yapılabilir. Zorluk, matematikçinin kanıtını bilgisayarın anlayabileceği dile çevirebilmesindedir. Matematikçi de bir insandır. Düşünürken günlük dilde düşünür, biçimsel matematik dilinde düşünmez. Örneğin, "*A kümesinin B kümesinde yoğun olduğunu varsayalım,*" der. Bu basit tümcede *A* ve *B* kümelerinin ve "yoğunluk" teriminin tanımları gizlidir. Matematikçi bu tanımların ne demek olduğunu bilir, ama bilgisayarın anlayabileceği bir dilde yazmakta zorlanır. Çünkü bu tanımları bilgisayarın anlayabileceği bir dile çevirmeye kalksa, kullanacağı kâğıt için Amazon ormanları yetmeyebilir.

Matematikçi bilgisayardan daha mı zekidir? Bir açıdan öyledir. Çünkü matematikçi sezgisini kullanır. Oysa bilgisayarın sezgi gücü yoktur (en azından kısıtlıdır; yapay zekâ denilen araştırma alanının en önemli sorunlarından biri bilimcinin sezgisini bilgisayara aktarabilmektir.) Matematikçi bir kanıta başlamadan önce kanıtın hangi yolu izlemesi gerektiğini aşağı yukarı bilir. Sezgi gücüyle, sağduyuyla bilir. Kanıtını da kâğıda geçirirken biçimsel matematik dilini değil, günlük dili kullanır[3].

Matematikçinin çalışırken, yani düşünürken ve bulduklarını kâğıda geçirirken kullandığı bu dili biçimsel dile çevirmek kolay değildir. Hatta belki de olanaksızdır, insan ömrüne sığmayabilir. Satranç oyunu bu yazdıklarıma güzel örnek olur. Satranç oyuncusu, oyunun bir anında tüm olasılıkları düşünmez. Sezgisi, sağduyusu, alışkanlıkları, satranç terbiyesi, yüzlerce olasılıktan birkaçını seçmesini sağlar ve bu olasılıklar üzerinde kafasını yorar. Matematikçi de bu yönden biraz satranç oyuncusunu andırır.

Sezginin gücünden yararlanan matematikçi, sezgiden zarar da görebilir: yanlış yapar. Şimdi, yanlış olduğu apaçık belli olan bir "teorem" kanıtlayacağız. Sezgimizi kullanarak...

"Teorem." $-1 = 1$.

Kanıt: Gerçel sayılarda[4] karesi -1'e eşit olan bir sayı yoktur. Ama karmaşık sayılarda karesi -1'e eşit olan bir sayı vardır, hem de bir tane değil iki tane vardır. Bu sayılara i ve $-i$ adı verilir. Yani,

$$i^2 = -1 \text{ ve } (-i)^2 = -1$$

dir. Başka bir deyişle karmaşık sayılarda -1'in karekökü vardır. Çoğu kitapta,

$$i = \sqrt{-1}$$

3 Matematiğin ve genel olarak bilimlerin, okullarımızda Türkçe öğretilmesi salt Türkçemiz için değil, bu yüzden de önemlidir. Bilimin evrensel olduğu savunulabilir, ama bilimci düşünürken evrensel değildir. En iyiyi, en doğruyu anadilinde düşünür. Çünkü sezgisiyle ve sağduyusuyla düşünür. Yaratıcı güçte sezgi ve sağduyuya yabancı bir dilde erişmek anadilden daha zordur. Bilim insanı rüya gördüğü dilde bilim yapmalıdır.

4 Gerçel sayılar, "bildiğimiz", bir doğru üzerinde gösterilen sayılardır.

yazar. Bu yazılımın ne kadar tehlikeli olduğunu göreceğiz şimdi.

Başlıyoruz:

$$i = \sqrt{-1} = \sqrt{\frac{-1}{1}} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{1}{i}.$$

Demek ki,

$$i = \frac{1}{i}$$

dir. Yani, $i^2 = 1$. Oysa $i^2 = -1$ idi. Demek ki $-1 = 1$. Teoremimiz kanıtlanmıştır.

Yanlış var bir yerde ama nerde?

Yanlış yazılımda.

$$\sqrt{-1} = i$$

yazmaya hakkımız yok. Çünkü -1 sayısının iki kökü vardır: i ve $-i$. Bunlardan birinin öbürüne göre bir üstünlüğü, bir ayrıcalığı yoktur[5]. Her ikisi de aynı özellikleri sağlarlar. Yazının kalan bölümünde bunu göstereceğim.

Önce gerçel sayılardan başlayayım. Gerçel sayılarda köklerden birini öbürüne yeğleyebiliriz. Çünkü gerçel sayılarda köklerden biri sıfırdan büyüktür, öbürüyse küçüktür. Yani iki kökü birbirinden ayırt edebiliriz. Örneğin, $x^2 = 25$ ise, x ya 5'tir ya da -5. Bu iki kökten yalnızca bir tanesi sıfırdan büyüktür: 5. İki kökü birbirinden ayırıp $\sqrt{25} = 5$ yazabiliriz. Gerçel sayılarda, eğer $x \geq 0$ ise, x'in karekökü şöyle tanımlanır[6]:

$$\sqrt{x} = y \iff y \geq 0 \wedge y^2 = x.$$

Yukardaki tümcede $y \geq 0$ yerine

$$\exists z \left(z^2 = y\right)$$

de yazabiliriz, çünkü gerçel sayılarda pozitif olmakla bir sayı-

---

5 Eğer bu iki kökten birini (örneğin i'yi) **yapay** olarak öbürüne yeğleyecek bile olsak,o zaman $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ eşitliği geçerli olmayabilir.

6 $\wedge$ simgesi "ve" anlamındadır.

nın karesi olmak eşanlamlıdır. Dolayısıyla, gerçel sayılarda karekök şöyle tanımlanır:

$$\sqrt{x} = y \Leftrightarrow \exists z\,(z^2 = y \wedge y^2 = x).$$

Bu tümcedeki z^2 ve y^2 terimlerinin yerine $z{\cdot}z$ ve $y{\cdot}y$ kullanırsak, tanımımız

$$\sqrt{x} = y \Leftrightarrow \exists z\left(z{\cdot}z = y \;\wedge\; y{\cdot}y = x\right)$$

olur. Bu son tanımda kullandığımız tek özel simge çarpma (·) simgesidir.

Şimdi karmaşık sayılara gelelim. Her karmaşık sayı,

$$a + bi$$

biçiminde yazılır. Burda a ve b sayıları gerçel sayılardır. Karmaşık sayılarda toplama ve çarpma "doğal"' olarak yapılır:

$$0i = 0,$$
$$(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i,$$
$$(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i.$$

Karmaşık sayılar gerçel sayıları içerirler: $a + bi$ karmaşık sayısında $b = 0$ olarak alırsak, a gerçel sayısını buluruz.

Daha önce de belirttiğim gibi karmaşık sayılarda i'yle $-i$'yi birbirinden ayırt edemeyiz. Karmaşık sayılarda, gerçel sayılarda olduğu gibi doğal bir sıralama yoktur. i sayısı için, $-i$'den küçük ya da büyük diyemeyiz. Dahası, karmaşık sayıların toplama ve çarpma kullanılarak yazılabilen hiçbir özelliği, i sayısıyla $-i$ sayısı arasında bir ayrım yapamaz. Nitekim, karmaşık sayılarda i sayısını, $-i$ sayısına yollayan bir özyapı eşlemesi[7] vardır:

$$f(a + bi) = a - bi$$

eşlemesi. Bu eşleme şu özellikleri sağlar: Her x ve y karmaşık sayıları için

$$f(xy) = f(x)f(y) \text{ ve } f(x + y) = f(x) + f(y).$$

7 Eşleme: birebir ve örten bir fonksiyon; bijeksiyon.
Özyapı eşlemesi: otomorfizma, yapıyı bozmayan, yapıya "saygı duyan" eşleme.

Okur bu özellikleri kolaylıkla doğrulayabilir. Öte yandan, f, i sayısını $-i$ sayısına gönderir, ama toplama ve çarpmayı etkilemez. Toplama ve çarpmayı etkilemediği gibi, gerçel sayıları da etkilemez: Eğer a gerçel bir sayıysa, $f(a) = a$ dır.

Demek ki karmaşık sayılarda, toplama, çarpma ve gerçel sayılar kullanarak yazılabilen hiçbir özellik i sayısıyla $-i$ sayısını birbirinden ayıramaz. Dolayısıyla bu iki sayıdan birini öbürüne yeğleyemeyiz. Yani

$$\sqrt{-1} = i$$

formülünü yazamayız, yazarsak da işlem yaparken dikkatli olmalıyız, yoksa yukardaki gibi $-1 = 1$ buluruz. Sonuç olarak

$$\sqrt{-1} = i$$

yazılımı tehlikelidir, ve son derece dikkatle kullanılmalıdır.

Sezgi gücüyle,

$$\sqrt{-1} = i$$

yazdık ve yanılgıya düştük. Önemli mi? Bir yanlışa pabuç mu bırakacağız? Hem sonra kim söyledi matematiğin tehlikesiz bir oyun olduğunu?