Birkaç Sihirbazlık

Birinci Sihirbazlık: Size diyorum ki:

– 100'den küçük bir doğal sayı tutun, ama sayıyı bana söylemeyin.

Tutuyorsunuz 100'den küçük bir sayı. Diyelim 68'i tuttunuz. Tuttuğunuz bu sayıyı ben bilmiyorum.

– Şimdi, diyorum, bana tuttuğunuz sayının 3'e, 5'e ve 7'ye bölündüğünde kalanlarını sırasıyla söyleyin.

68'i sırasıyla 3'e, 5'e ve 7'ye bölüyorsunuz, kalanlarını buluyorsunuz: 2, 3 ve 5. Bu sayıları bana söylüyorsunuz:

– 2, 3 ve 5, diyorsunuz.

Ben de size tuttuğunuz sayıyı söylüyorum:

– 68'i tutmuşsunuz!

Şaşırıyorsunuz...

Sayınızı nasıl buldum? Elimde bir tablo, çizelge, bilgisayar filan yoktu, birkaç kolay işlem yaptım. Ne yaptım?

İkinci Sihirbazlık: Size diyorum ki:

– 1000'den küçük bir doğal sayı tutun, ama sayıyı bana söylemeyin.

Tutuyorsunuz 1000'den küçük bir sayı. Diyelim 468'i tuttunuz.

– Şimdi, diyorum, bana tuttuğunuz sayının 7'ye, 11'e ve 13'e bölündüğünde kalanlarını sırasıyla söyleyin.

468'i sırasıyla 7'ye, 11'e ve 13'e bölüyorsunuz, kalanlarını buluyorsunuz: 6, 6 ve 0. Bu sayıları bana söylüyorsunuz:

– 6, 6 ve 0, diyorsunuz.

Ben de size tuttuğunuz sayıyı söylüyorum:

– 468'i tutmuşsunuz!

Sayınızı nasıl buldum? Elimde bir tablo, çizelge, bilgisayar filan yoktu, birkaç kolay işlem yaptım. Ne yaptım?

İlk sorudan başlayalım düşünmeye. Önce bu sihirbazlığın yapılıp yapılamayacağına bakalım. 100'den küçük iki değişik sayı, 3'e, 5'e ve 7'ye bölündüğünde aynı kalanları verebilir mi? Eğer verebilirse o zaman bu sihirbazlık yapılamaz; sihirbazlığın yapılabildiğini söylediğime göre, 100'den küçük iki değişik sayının 3'e, 5'e ve 7'ye bölündüğünde kalanlarının hepsi birbirine eşit olamaz. Bunun neden böyle olduğunu birazdan göreceğiz.

Yöntemi bir örnekle açıklayayım. Diyelim bana 2, 3 ve 4 sayılarını verdiniz. Yani tuttuğunuz sayı 3'e bölündüğünde 2 kalıyor, 5'e bölündüğünde 3 kalıyor ve 7'ye bölündüğünde 4 kalıyor. Şu işlemi yapıyorum:

$$2 \times 70 + 3 \times 21 + 4 \times 15.$$

Sonuç 263 çıkıyor. Tuttuğunuz sayı 263 olamaz elbet, çünkü sayınız 100'den küçük bir sayı; ama 263'ten 210 çıkarırsam tuttuğunuz sayıyı bulurum. Yani 53'ü tutmuşsunuzdur.

Bir başka örnek: Bana 1, 2 ve 1 sayılarını verdiniz. Demek ki sayınız 3'e ve 7'ye bölündüğünde 1, 5'e bölündüğünde 2 kalıyormuş. Şu işlemi yapıyorum:

$$1 \times 70 + 2 \times 21 + 1 \times 15.$$

Sonuç 127 çıkıyor. Bu sayıdan 105 çıkarırsam, tuttuğunuz sayıyı bulurum: 22.

Genel yöntem şöyle: Diyelim size a, b ve c kalanları verildi (bu sırayla.) Şu işlemi yapın:

$$70a + 21b + 15c.$$

Çıkan sonuçtan çıkarabildiğiniz kadar 105 çıkarın; bir başka deyişle, çıkan sonucu 105'e bölün, kalan sayı tutulan sayıdır.

Yukarda kullandığım 70, 21 ve 15 sayıları nerden çıktılar? Bu sayılara **anahtar sayıları** diyelim. Örneğin 70 anahtar sayısı nasıl bulundu? Anlatayım. Öyle bir sayı arıyorum ki,

3'e bölündüğünde kalan 1 olsun
5'e bölündüğünde kalan 0 olsun
7'ye bölündüğünde kalan 0 olsun.

70 sayısı yukardaki özellikleri sağlar, hatta 70, bu özellikleri sağlayan pozitif en küçük sayıdır. Anahtar sayımızın 5'e ve 7'ye bölünmesi gerekiyor, demek ki 35'e de bölünmesi gerekiyor, demek ki anahtar sayımız, 35, 70, 105, 140, 175,... gibi 35'in katlarından biri olmalı. Birinci sayı değil ama ikinci sayı istediğimiz işlevi görüyor. 70 yerine 175 de alabilirdik.

21 anahtar sayısı da şöyle bulunmuştur: Öyle bir sayı arıyorum ki,

3'e bölündüğünde kalan 0 olsun
5'e bölündüğünde kalan 1 olsun
7'ye bölündüğünde kalan 0 olsun.

21 yukardaki özellikleri sağlıyor. 15 anahtar sayısını şöyle bulduk: Öyle bir sayı arıyorum ki,

3'e bölündüğünde kalan 0 olsun
5'e bölündüğünde kalan 0 olsun
7'ye bölündüğünde kalan 1 olsun.

15 yukardaki özellikleri sağlıyor.

Eğer $a = 0, 1, 2$, $b = 0, 1, 2, 3, 4$ ve $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ise,

$$70a + 21b + 15c$$

sayısı 3'e, 5'e ve 7'ye bölündüğünde kalanlar sırasıyla a, b ve c sayılarıdır. Demek ki, eğer size verilen üç sayı a, b ve c ise, tutulan sayıyla $70a + 21b + 15c$ sayısı, 3'e, 5'e ve 7'ye bölündüğünde aynı kalanları verir. Bundan da, iki sayının arasındaki farkın 3'e, 5'e ve 7'ye, yani $3 \times 5 \times 7 = 105$'e bölündüğü çıkar.

İkinci sihirbazlığın nasıl yapıldığına bakalım.

Önce,

7'ye bölündüğünde kalanın 1 olduğu
11'e bölündüğünde kalanın 0 olduğu
13'e bölündüğünde kalanın 0 olduğu

bir sayı bulacağım. Böyle bir sayı 11'e ve 13'e bölündüğünden, 11×13'e, yani 143'e de bölünür. 143'ün katlarına bakalım teker teker. Hangisinin 7'ye bölündüğünde kalanı 1 ise, o sayıyı birinci anahtar sayımız olarak alalım. Biraz denemeyle, $143 \times 5 = 715$'in işimizi gördüğü anlaşılır. Birinci anahtar sayımız 715'tir.

İkinci anahtar sayımız şu özellikleri sağlamalıdır:

7'ye bölündüğünde kalan 0 olmalı
11'e bölündüğünde kalan 1 olmalı
13'e bölündüğünde kalan 0 olmalı.

Böyle bir sayı $7 \times 13 = 91$'in katı olmalı. $91 \times 4 = 364$ işimizi görüyor.

Üçüncü anahtar sayımız şu özellikleri sağlamalı:

7'ye bölündüğünde kalan 0 olmalı
11'e bölündüğünde kalan 0 olmalı
13'e bölündüğünde kalan 1 olmalı

Sayımız $7 \times 11 = 77$'in katı olmalı. $77 \times 12 = 924$ işimizi görüyor.

Şimdi, eğer a, b ve c kalanları verilmişse, tutulan sayıyla,

$$715a + 364b + 924c$$

sayısı arasındaki fark $7 \times 11 \times 13 = 1001$'in katlarıdır. $715a + 364b + 924c$ sayısından çıkarabildiğimizce 1001'i çıkaralım, tutulan sayıyı buluruz.

Bir örnek verelim. Diyelim karşımızdaki 200'ü tuttu. Biz bu sayıyı daha bilmiyoruz, birazdan bulacağız. 200'ü sırasıyla 7'ye, 11'e ve 13'e bölelim ve kalanlarına bakalım: 4, 2, 5. Bu üç sayı veriliyor bize.

Şimdi,

$$715 \times 4 + 364 \times 2 + 924 \times 5$$

sayısını hesaplayalım. 8208 buluruz. Bu sayıdan 1001'in katlarını çıkaralım:

$$8208 - 8008 = 200.$$

İşte sayıyı bulduk!

Genel olarak, $a_1, ..., a_n$ sayılarının ikişer ikişer en büyük ortak bölenleri 1 ise, $a_1 \times ... \times a_n$'den küçük bir x sayısının $a_1, ..., a_n$ sayılarına bölündüğünde kalanlarını bilmek, x'i bulmak için yeterlidir. Aynen yukardaki yöntemi uygularız. Anahtar sayıları bulmak gerekir elbet. Anahtar sayılarının bulunabilmesi için de $a_1, ..., a_n$ sayılarının ikişer ikişer ortak bölenlerinin olmaması gerekir.