

## Birkaç Oyun Daha

**Birinci Oyun.** İki oyuncu şu oyunu oynuyorlar: Her ikisi de, birbirinden habersiz, toplamı 9 olan üç doğal sayı seçiyor. En büyük sayılar, ortanca sayılar ve en küçük sayılar karşılaştırılıyor. Her karşılaştırmada büyük sayının sahibi 1, küçük sayının sahibi 0 puan alıyor. Eşitlik halinde her iki oyuncu da 1/2 puan alıyor.

Örneğin, ben (4, 3, 2) sayılarını seçmişsem, siz de (5, 4, 0) sayılarını seçmişseniz, oyunu 2–1 kazanırsınız. Öte yandan, ben (4, 3, 2), siz (3, 3, 3) seçmişseniz, berabere kalırız.

Bu oyunun en iyi stratejisi nedir? Hangi stratejiyle oynarsak kazanma olasılığımızı artırırız?

Varsayımlarımız şunlar:

1) Her iki oyuncu da akıllı. Oyunculardan biri toplamı 9 olan rastgele üç sayı seçmiyor, akıllı oynuyor. Ve her ikisi de öbürünün en az kendisi kadar akıllı olduğunu biliyor.

2) Oyun çok oynanıyor. Dolayısıyla, bir zaman sonra bir oyuncu öbür oyuncunun stratejisini anlıyor.

Bu oyunu çözümlayelim.

Her oyuncu şu 12 hamleden birini yapmak zorundadır:

900, 810, 720, 711, 630, 621, 540, 531, 522, 441, 432, 333.

Aşağıdaki tabloda kalın puntoyla yazılmış birinci sütun bi-

zim seçeneklerimizi gösteriyor. Kalın puntıyla yazılmış birinci sıra da öbür oyuncunun seçeneklerini... Örneğin biz 621'i seçmişsek, öbür oyuncu da 540'ı seçmişse, oyunu 2-1 kazanırız. Dolayısıyla, 621 sırasıyla 540 sütununun kesiştiği kareye 1 yazdık.

	900	810	720	711	630	621	540	531	522	441	432	333
900	0	0	0	-1	0	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1
810	0	0	0	0	0	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1
720	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	-1	-1
711	1	0	0	0	1	0	1	0	-1	0	-1	-1
630	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	-1	0	0
621	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	-1
540	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	1	1
531	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
522	1	1	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	-1
441	1	1	1	0	1	0	0	0	-1	0	0	1
432	1	1	1	1	0	1	-1	0	0	0	0	0
333	1	1	1	1	0	1	-1	0	1	-1	0	0

Görüldüğü gibi 531 hamlemiz hiç kaybetmiyor. Oysa öbür seçeneklerimizin hepsinde kaybetme olasılığımız var.

Yalnızca bu gözleme dayanarak, 531'in en iyi strateji olduğunu söylemek doğru olmaz. Çünkü örneğin 432'yle, daha fazla, tam 5 kez kazanıyoruz (öte yandan 1 kez de kaybediyoruz.) Belki de, daha çok kazanmak için, arada bir 432 oynamak gerekir!

Gene de hep 531'i oynamak en iyi stratejidir, daha doğrusu hep 531'i oynamak en iyi stratejilerden biridir<sup>1</sup>. Neden? Şöyle düşünelim:

Hep 531 oynarsak, öbür oyuncu akıllı olduğundan 900, 810 ve 720 hamlelerini yapmayacaktır. Dolayısıyla, hep 531 oynayarak berabere kalırız.

1 Birkaç tane, hatta sonsuz tane "en iyi strateji" olabilir. Bu oyunda sonsuz tane "en iyi strateji" vardır. Neden sonsuz tane "en iyi strateji" olduğu bir sonraki oyun okununca (umarım) anlaşılacak.

Berabere kalacağımız bir stratejimizin olduğunu biliyoruz: “hep 531” stratejisi. Dolayısıyla “hep 531”den daha iyi bir strateji gerçekten kazandıran, bizim lehimize pozitif sonuç veren stratejidir. Eğer böyle bir strateji varsa, öbür oyuncu da (o da akıllı olduğundan ve oyun simetrik olduğundan) aynı stratejiyle oynar ve her ikimizde kazanırız! Her ikimiz de kazanamayacağımızdan, “hep 531” en iyi stratejilerden biridir.

**İkinci Oyun.** Aynı oyun, ama üç sayının toplamı bu kez 10 olacak. Yine en iyi stratejiyi bulmak istiyoruz.

Yukardaki gibi oyunun bir çizelgesini çıkaralım. Sıralar bizi, sütunlar öbür oyuncuyu gösteriyor (1000 stratejisi, 10–0–0 demek):

	10	9	8	8	7	7	6	6	6	5	5	5	4	4
	0	1	2	1	3	2	4	3	2	5	4	3	4	3
	0	0	0	1	0	1	0	1	2	0	1	2	2	3
1000	0	0	0	-1	0	-1	0	-1	-1	0	-1	-1	-1	-1
910	0	0	0	0	0	-1	0	-1	-1	0	-1	-1	-1	-1
820	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-1	-1	-1	-1
811	1	0	0	0	1	0	1	0	-1	1	0	-1	-1	-1
730	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	-1	0	-1	0
721	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	-1	-1	-1
640	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	1
631	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0
622	1	1	0	1	-1	0	0	0	0	1	1	0	0	-1
550	0	0	0	-1	0	-1	0	-1	-1	0	0	0	1	1
541	1	1	1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	1
532	1	1	1	1	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
442	1	1	1	1	1	1	0	1	0	-1	0	0	0	0
433	1	1	1	1	0	1	-1	0	1	-1	-1	0	0	0

Bu oyun yukardakinden biraz farklı. Yukarda, hiç kaybetmeyen bir strateji vardı, burdaysa öyle bir strateji yok. Ama şöyle

bir bakıldığında, 631, 541, 532 ve 442 stratejilerinin pek fena olmadığı anlaşılıyor. Öte yandan, örneğin hep 442 oynayamayız, çünkü o zaman da öbür oyuncu 550 oynar ve kaybederiz<sup>2</sup>.

Oyunu önce biraz basitleştirelim.

Düşünelim. 1000'i seçmektense, 910'u seçmeyi yeğlemeyiz. Çünkü öbür oyuncunun seçimi 811 değilse, ha 1000'i seçmişiz, ha 910'u, aralarında bir ayrım yok; öte yandan öbür oyuncu 811'i seçerse, 910'u 1000'e yeğlemeliyiz: Kaybedeceğimize hiç olmazsa berabere kalırız. Yani her durumda 910, 1000'den daha iyidir. Dolayısıyla 1000 sırasını tablomuzdan silebiliriz.

	10	9	8	8	7	7	6	6	6	5	5	5	4	4
	0	1	2	1	3	2	4	3	2	5	4	3	4	3
	0	0	0	1	0	1	0	1	2	0	1	2	2	3
1000	0	0	0	-1	0	-1	0	-1	-1	0	-1	-1	-1	-1
910	0	0	0	0	0	-1	0	-1	-1	0	-1	-1	-1	-1

820 de 910'dan daha iyi. Demek ki 910'u da silebiliriz.

721 de 820'den iyi. Demek ki 820'yi de silebiliriz.

1000, 910 ve 820'yi seçmememiz gerektiğini gördük.

Öbür oyuncu da akıllı. O da bizim gibi düşünüyor. Demek ki o da 1000, 910 ve 820 hamlelerini yapmayacak. Dolayısıyla çizelgemizden ilk üç sırayı ve sütunu silebiliriz. Oyunun yeni haline bakalım:



2 Birazdan, hiç 631, 541 ve 532 oynamamız gerektiğini göreceğiz. Tuhaf değil mi?

	811	730	721	640	631	622	550	541	532	442	433
811	0	1	0	1	0	-1	1	0	-1	-1	-1
730	-1	0	0	0	0	1	0	-1	0	-1	0
721	0	0	0	1	0	0	1	0	-1	-1	-1
640	-1	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	1
631	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0
622	1	-1	0	0	0	0	1	1	0	0	-1
550	-1	0	-1	0	-1	-1	0	0	0	1	1
541	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	1
532	1	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
442	1	1	1	0	1	0	-1	0	0	0	0
433	1	0	1	-1	0	1	-1	-1	0	0	0

Ne yazık ki oyun daha fazla sadeleşmiyor. Geriye, eskisi kadar olmasa bile, oldukça karmaşık bir oyun kaldı.

Şimdi ne yapmalı? Düşünmeli! Daha derin düşünmeli...

Belli ki “hep bilmemkaç” diye bir strateji en iyi strateji olmaz, böyle bir strateji bize para kaybettirir. Dolayısıyla, arada sırada 631, arada sırada 541... oynamalı. Ne kadar “arada sırada”? Yani hangi hamle hangi sıklıkta (olasılıkla) seçilmelidir?

Diyelim öbür oyuncu 811 hamlesini  $a_{811}$ , 730 hamlesini  $a_{730}$  sıklıkta (olasılıkla)... seçti<sup>3</sup>. Eğer 811 oynarsak,

- $a_{811}$  olasılıkla 0 kazanacağız,
- $a_{730}$  olasılıkla 1 kazanacağız,
- $a_{721}$  olasılıkla 0 kazanacağız,
- $a_{640}$  olasılıkla 1 kazanacağız,
- $a_{631}$  olasılıkla 0 kazanacağız,
- $a_{622}$  olasılıkla -1 kazanacağız,
- $a_{550}$  olasılıkla 1 kazanacağız,
- $a_{541}$  olasılıkla 0 kazanacağız,
- $a_{532}$  olasılıkla -1 kazanacağız,

3 Bu sayılar 0'la 1 arasındadır ve toplamları 1'dir.

$a_{442}$  olasılıkla  $-1$  kazanacağız,  
 $a_{433}$  olasılıkla  $-1$  kazanacağız,  
Dolayısıyla 811 stratejisinden beklentimiz,

$$a_{730} + a_{640} - a_{622} + a_{550} - a_{532} - a_{442} - a_{433}$$

dır. Bu beklentiye  $b_{811}$  diyelim:

$$b_{811} = a_{730} + a_{640} - a_{622} + a_{550} - a_{532} - a_{442} - a_{433}.$$

Öbür hamlelerin de beklentilerini bulabiliriz: İşte tam dizelge:

$$b_{811} = a_{730} + a_{640} - a_{622} + a_{550} - a_{532} - a_{442} - a_{433}$$

$$b_{730} = -a_{811} + a_{622} - a_{541} - a_{442}$$

$$b_{721} = a_{640} + a_{550} - a_{532} - a_{442} - a_{433}$$

$$b_{640} = -a_{811} - a_{721} + a_{532} + a_{433}$$

$$b_{631} = a_{550} - a_{442}$$

$$b_{622} = a_{811} - a_{730} + a_{550} + a_{541} - a_{433}$$

$$b_{550} = -a_{811} - a_{721} - a_{631} - a_{622} + a_{442} + a_{433}$$

$$b_{541} = a_{730} - a_{622} + a_{433}$$

$$b_{532} = a_{811} + a_{721} - a_{640}$$

$$b_{442} = a_{811} + a_{730} + a_{721} + a_{631} - a_{550}$$

$$b_{433} = a_{811} + a_{721} - a_{640} + a_{622} - a_{550} - a_{541}$$

Biz, bu beklentiler içinden en büyüğünü bulup, o beklentiye veren hamleyi yapmalıyız. Örneğin, eğer  $b_{442}$ , bu beklentilerin en büyüğüyse, o zaman 442 hamlesini yapmalıyız, ki beklentimiz  $b_{442}$  (beklentilerin en büyüğü) olsun. Diyesim, yukardaki 11 sayının en büyüğünü bulmaya çalışacağız:

$\max(b_{811}, b_{730}, b_{721}, b_{640}, b_{631}, b_{622}, b_{550}, b_{541}, b_{532}, b_{442}, b_{433})$   
sayısını bulmalıyız.

Öbür oyuncu bizim böyle düşüneceğimizi biliyor elbette. O da hesaplayacağımız  $\max(b_{811}, \dots, b_{433})$  beklentisini küçültmek istiyor. Yani öbür oyuncu, öyle,

$a_{811}, a_{730}, a_{721}, a_{640}, a_{631}, a_{622}, a_{550}, a_{541}, a_{532}, a_{442}, a_{433}$   
sayıları bulmalı ki, beklentimiz olan

$\max(b_{811}, b_{730}, b_{721}, b_{640}, b_{631}, b_{622}, b_{550}, b_{541}, b_{532}, b_{442}, b_{433})$   
sayısı en küçük olsun. O zaman beklentimiz,

$$\min(\max(b_{811}, b_{730}, b_{721}, b_{640}, b_{631}, b_{622}, b_{550}, b_{541}, b_{532}, b_{442}, b_{433}))$$

olur<sup>4</sup>.

Eğer belli  $a_{811}, \dots, a_{433}$  sayıları için,  $b$ 'lerin hepsi negatifse, o zaman öbür oyuncu bu olasılıklarla hamlelerini yapar ve ne yaparsak yapalım, ağzımızla kuş tutsak da uzun dönemde kaybederiz. Öbür oyuncu bu olasılıklarla oynar da biz oynayamaz mıyız? Biz de oynarız. Ve o zaman da biz kazanırız. Hem kaybedip hem kazanamayacağımıza göre... Demek ki  $a$  olasılıkları ne olursa olsun,  $b$ 'lerden biri pozitif olmak zorunda. Dolayısıyla,  $a$  olasılıkları ne olursa olsun,

$$\max(b_{811}, b_{730}, b_{721}, b_{640}, b_{631}, b_{622}, b_{550}, b_{541}, b_{532}, b_{442}, b_{433}) \geq 0$$

dır.

Eğer her  $a$  seçeneği için,

$\max(b_{811}, b_{730}, b_{721}, b_{640}, b_{631}, b_{622}, b_{550}, b_{541}, b_{532}, b_{442}, b_{433}) > 0$  ise, o zaman, öbür oyuncu ne oynarsa oynasın kaybeder. Aynı şey bizim için de geçerlidir elbet! Bu da olamayacağından, öyle  $a_{811}, \dots, a_{433}$  sayıları vardır ki,

$$\max(b_{811}, b_{730}, b_{721}, b_{640}, b_{631}, b_{622}, b_{550}, b_{541}, b_{532}, b_{442}, b_{433}) = 0$$

eşitliği geçerlidir.

Bütün  $b$ 'leri birden sıfıra eşitleyebilir miyiz? Evet. Biraz lineer denklem çözeceğiz<sup>5</sup>. Çözdük! Bütün  $b$ 'lerin sıfır olması için  $a$ 'ların şu koşulları yerine getirmesi gerekir:

$$a_{622} = a_{442} = a_{730} = a_{550}$$

$$a_{811} = a_{721} = a_{640} = a_{631} = a_{541} = a_{532} = a_{433} = 0.$$

$a$ 'ların toplamı da 1 olması gerektiğinden,

$$a_{622} = a_{442} = a_{730} = a_{550} = 1/4$$

$$a_{811} = a_{721} = a_{640} = a_{631} = a_{541} = a_{532} = a_{433} = 0$$

olmalı.

4 Oyunlar kuramında, bu yöntemle en iyi stratejinin belirlenmesine “minimax ilkesi” denir.

5 Bir de  $a$ 'ların en az sıfır olduklarını, yani negatif olamayacaklarını gözönünde tutmalıyız.

Ben yukardaki olasılıklarla oynarsam, siz de o olasılıklarla oynamak zorundasınız, yoksa uzun dönemde kaybedersiniz. İnanmazsınız, bir bilgisayar programı yapıp deneyin.

İkimiz de yukardaki olasılıklarla (stratejiyle) oynarsak, oyundan beklentimiz 0 olur.

Oyun simetrik olduğundan, beklentimizin 0 olması gerektiğini zaten biliyorduk: Eğer kazanan bir stratejimiz olsaydı, aynı stratejiyi karşı taraf da uygular ve ikimiz de kazanırdık.

**Üçüncü Oyun.** Üç oyuncu, birbirinden habersiz 0, 1, 2, 3, 4, 5 sayılarından birini seçiyor. İkinci büyük sayıyı seçen kazanıyor. Şöyle:

(2, 3, 4) seçilmişse, 3'ü seçen 1 puan alıyor, öbürleri  $-1/2$  puan alıyor.

(2, 2, 3) seçilmişse, 2'yi seçenler  $1/2$  puan alıyorlar, 3'ü seçen  $-1$  puan alıyor.

(2, 3, 3) seçilmişse, 2'yi seçen 1 puan alıyor, 3'ü seçenler  $-1/2$  puan alıyor.

(2, 2, 2) seçilmişse, herkes  $-1$  puan alıyor<sup>6</sup>.

Her üç oyuncunun da akıllı olduğunu varsayarak, bu oyunu (kazanma olasılığımızı artırmak için elbet) nasıl oynamalıyız?

Bu oyunu oynamayız! Neden?

Kimse 5'i seçmez. Çünkü 5 seçildiğinde kazanma olasılığı hiç yoktur. 5'i seçen herkes hep kaybedecektir. Üç oyuncu da akıllı olduğundan, 5'in seçilmemesi gerektiğini üçü de bilir, yani kimse 5'i seçmez.

5 seçilemeyeceğinden, seçilecek en büyük sayı 4'tür. Aynen yukardaki nedenden, 4'ü de kimse seçmez. 4 seçilemeyeceğinden, 3, seçilebilecek en büyük sayıdır. Dolayısıyla 3 de seçilmez... Üç oyuncu da akıllıysa, bu oyun oynanmaz!

---

<sup>6</sup> Parayla oynanıyorsa, kimsenin kazanmadığı para (3 lira), bir sonraki oyunda kazanan(lar)a verilebilir örneğin.