Bir Tekhücrelinin Soyunu Sonsuza Dek Sürdürme Şansı

İkiye bölünerek üreyen tekhücreliler vardır. Tekhücreli ve tekcinsiyetlidirler galiba. Lisede öğrenmiştim. Unutmuşum. Kimseye gereksinmeden ikiye bölünerek üreyen bir yaratık düşünelim. Örneğin amip. Aklımda yanlış kalmadıysa amip ikiye bölünerek ürer, aklımda yanlış kaldıysa da önemi yok, amibin ikiye bölünerek ürediğini varsayalım bu yazılık.

Kimi amipler, çeşitli nedenlerden, ikiye bölünemeden, yani üreyemeden ölürler. Amiplerin p olasılıkla ikiye bölündüklerini, $1 - p$ olasılıkla da üreyemeden öldüklerini varsayalım. Burda p, 0'la 1 arasında bir sayıdır. Eğer $p = 0$ ise bütün amipler üreyemeden ölürler. Eğer $p = 1$ ise, bütün amipler ürerler, herbiri ikiye bölünür. Eğer $p = 1/2$ ise, bir amip üremekle ölmek arasında karar vermek için yazı-tura atar, örneğin yazı gelirse ürer, tura gelirse ölür. Eğer $p = 1/6$ ise, bir amip üremekle ölmek arasında karar vermek için zar atar, örneğin şeş gelirse ürer, yoksa ölür.

p'nin değeri deneyle bulunur. Önce p'nin deneyle nasıl bulunabileceğini göreceğiz. Bu, oldukça kolaydır.

Ardından, tek bir amibin soyunu sonsuza dek sürdürebilme şansının sıfırdan büyük olması için p'nin en az kaç olması gerektiğini bulacağız. Eğer p, 0'a yakınsa, yani amipler büyük bir olasılıkla üreyemeden ölüyorlarsa, tek bir amibin soyunu sonsuza dek sürdürebilmesi oldukça küçük bir olasılık olmalı, sıfır bile olabilir bu olasılık. Örneğin p sıfırsa, amip kaçınılmaz olarak ölecektir, soyu bir kuşak bile sürmeyecektir. Eğer $p = 0{,}001$ ise, amip binde bir olasılıkla bir kuşak üreyebilecektir; çok küçük bir olasılıkla bile olsa soyunu sonsuza dek sürdürme şansı olabilir; belki de hiç öyle bir şansı yoktur... Hesapsız kitapsız belli mi olur? Öte yandan, p, 1'e yakınsa, amibin soyunu sonsuza dek sürdürme olasılığı sıfırdan büyük bir sayı olabilir.

Bu sorunun yanıtını bulduktan sonra, araştırmada çoğu zaman olduğu gibi, sorularımızı çoğaltacağız.

Deneyle *p*'yi Bulmak[1]. Bir amibin üremesi ya da ölmesi için doğumundan sonra bir saate gereksindiğini varsayalım. Çok sayıda yeni doğmuş (!) amip, diyelim 1 milyon tane, bir saat boyunca büyükçe bir kavanozda bekletilir[2]. Bir saat sonra kavanoz açılır ve kavanozdaki amipler sayılır. Bu sayı 0'la 2 milyon arasında değişen bir sayı olmalıdır elbet. Eğer bir saat sonra kavanozdan hiç canlı amip çıkmamışsa, amipler hep ölüyor, hiç üremiyorlar demektir, yani $p = 0$'dır[3]. Eğer 2 milyon amip çıkmışsa, o zaman hiç amip ölmemiş, hepsi üremiş demektir, dolayısıyla $p = 1$'dir. Eğer kavanozdan gene 1 milyon amip çıkmışsa, o zaman amiplerin yarısı (500 bini) ölmüştür, öbür yarısı üremiştir, yani $p = 1/2$'dir.

Matematiksel olarak p'yi nasıl buluruz? 1 milyon amibin bir saat sonra N tane olduğunu varsayalım. N'yi biliyoruz, p'yi bulmaya çalışıyoruz. Bu 1 milyon (yani 10^6) amibin $p \times 10^6$ tanesi üremiştir[4], her biri iki amip olmuştur. Geriye kalan $(1 - p) \times 10^6$

1 Atıyorum kafadan... Bu konuda herhangi bir bilgi sahibi değilim. Ama herhalde anlatacağım gibi yapılsa gerek.

2 Kavanoz büyük olmalı ki, yer yokluğu amiplerin rahat rahat üremelerini engellemesin.

3 Yeryüzünde amip olduğundan, deney sonucunda gerçekten $p = 0$ bulmuşsak deneyde bir hata yapmışız demektir.

4 Aşağı yukarı elbet... Kavanoza başlangıçta ne denli çok amip koyarsak, gerçek p'ye o denli yaklaşırız.

amip ölmüştür. Yani kavanozda bir saat sonra $2 \times p \times 10^6$ amip olmalıdır. Demek ki, $N = 2 \times p \times 10^6$. Bundan da $p = N/(2 \times 10^6)$ eşitliğini buluruz.

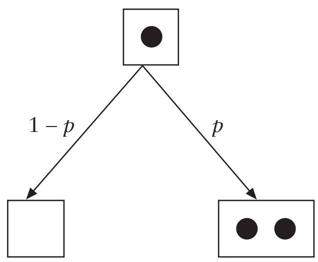
Genel olarak, kavanoza başlangıçta M amip koymuşsak ve bir saat sonra kavanozda N amip bulmuşsak, o zaman $p = N/2M$'dir.

Birinci soruyu yanıtladık. İkinci soruya geçelim. İkinci soruyu yanıtlamak biraz daha zor.

Bir Amibin Soyunu Sonsuza Dek Sürdürme Olasılığı. Tek bir amibin soyunu sonsuza dek sürdürememe olasılığına x diyelim. x'i hesaplamak istiyoruz[5].

Evet... Tek bir amibimiz var. Bir saat sonra bu amip $1 - p$ olasılıkla ölecektir. Demek ki x en azından $1 - p$ olmalıdır. Amip p olasılıkla ikiye bölünüp 2 amip olacaktır. Bir resim yapalım.

Amibimiz başlangıçta, sıfırıncı saatte, yandaki şeklin en üst noktası. Bir saat sonra, amip $1 - p$ olasılıkla sol oku seçecek ve ölecek, p olasılıkla sağ oku seçecek ve birken iki olacak. Sol oku izlerse, soy daha ilk kuşaktan tükenir. Sağ oku izlerse, ikinci kuşakta iki amip oluşur. Bu iki amibin herbiri de bir saat sonra ya ölecek ya üreyecektir. Her ikisi birden ölebilir, salt biri ölebilir, her ikisi birden üreyebilir. Yani birinci amibimizin soyunun kuruması için, birinci amip,



5 Amiplerin birbirlerinden bağımsız ürediğini varsayacağız, örneğin amiplerin çok üreyip, yer ve yemek için birbirleriyle kavga etmeyeceklerini varsayacağız. Ayrıca şunu da belirtmekte yarar var: Eğer tek bir amibin soyunun sonsuza dek sürme olasılığı sıfırsa, sonlu tane amip için de bu olasılık sıfırdır.

1) Ya sol oku izleyip ölmeli.

2) Ya da sağ oku izlemeli ve oluşan ikinci kuşak amiplerin her ikisinin de soyu kurumalı.

Dolayısıyla,

x = Sol oku izleme olasılığı + (sağ oku izleme olasılığı) × (iki amibin soylarının kuruma olasılığı)

denklemi geçerlidir. Sol oku izleme olasılığının $1 - p$, sağ oku izleme olasılığının p olduğunu biliyoruz. Demek ki,

$x = (1-p) + p \times$ (iki amibin soylarının kuruma olasılığı)

eşitliğini bulduk.

Eğer tek bir amibin soyunun kuruma olasılığı x ise, her iki amibin de soyunun kuruma olasılığı x^2'dir[6]. Demek ki, $x = (1-p) + px^2$ eşitliği geçerlidir. Bu, ikinci dereceden bir denklemdir. Kolaylıkla çözülür.

Eğer $p = 0$ ise, $x = 1$'dir. Eğer $p \neq 0$ ise iki çözüm bulunur: ya $x = 1$ ya da $x = (1-p)/p$.

Demek ki, $p \neq 0$ ise, x ya 1'e ya da $(1 - p)/p$'ye eşittir. Her ikisine birden eşit olamaz elbet[7]. Doğru yanıt hangisidir? 1 mi yoksa $(1 - p)/p$ mi? Belki kimi zaman 1'dir, kimi zaman $(1 - p)/p$.

Hangi Yanıt Doğru? x'in en fazla 1 olabileceğini biliyoruz. Çünkü x bir olasılıktır ve olasılıklar 0'la 1 arasında değişirler. Dolayısıyla, eğer $(1 - p)/p$ sayısı 1'den büyükse, ikinci yanıt doğru olamaz, birinci yanıt doğru olmalı, yani $x = 1$ olmalı. Kolay bir hesap, ancak $p \leq 1/2$ ise, $(1 - p)/p \geq 1$ olduğunu gösterir. Demek ki p, 1/2'den küçük olduğunda $x = 1$'dir ve amibin soyu kesinlikle sonlu bir zaman sonra tükenir. Sezgimiz de bunu söylemiyor mu zaten? Sezgimiz, p küçükse, amibin soyunu sonsuza dek sürdürmeme olasılığının büyük olduğunu, yani 1'e yakın olduğunu söylüyor. Demek ki bu olasılık maksimum değer olan

6 Örneğin bir zar atıldığında şeş gelme olasılığı 1/6'dır. İki zar atıldığında, her ikisinin de şeş gelme olasılığı $(1/6)^2$, yani 36'dır.

7 Yalan! Yalnızca $p = 1/2$ ise her ikisine birden eşit olabilir.

1'miş. Dolayısıyla, $p \leq 1/2$ ise, amibin sonsuza dek yaşama olasılığı yoktur.

Peki, $1/2 \leq p$ ise, x kaç olmalı? Bu soruyu yanıtlamak biraz daha zor. Çözümlememizi derinleştirmemiz gerekiyor. Bundan böyle $1/2 \leq p$ varsayımını yapacağız. O zaman,

$$(1 - p)/p \leq 1 \tag{1}$$

eşitsizliği geçerlidir. Bunu aklımızda tutalım.

En fazla n saat sonra hiç amip kalmama olasılığına x_n diyelim. Yani x_n, n'inci kuşak amip yetişmeme olasılığı, amip soyunun birinci, ikinci,... ya da $(n-1)$'inci kuşakta ölme olasılığı. Örneğin,

$$x_1 = 1 - p$$
$$x_2 = (1 - p) + p(1 - p)^2$$

dir.

Biraz düşününce, x'in x_n'lerin limiti olduğunu anlarız (n sonsuza gittiğinde.) Çünkü x_n, n kuşak amip yetişmeme olasılığıdır, x de sonsuzda amip kalmama olasılığıdır. Yani,

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \tag{2}$$

eşitliği geçerlidir. Bunu da aklımızda tutalım.

Doğru yanıtı bulmak için üçüncü bir olguya daha gereksiniyoruz. O da şu: $1/2 \leq p$ ise,

$$x_n \leq (1 - p)/p \tag{3}$$

Bu eşitsizliği n üzerine tümevarımla kanıtlayacağız. $x_1 = 1 - p$ olduğundan, (3) eşitsizliği $n = 1$ için geçerlidir. Şimdi (3)'ün n için geçerli olduğunu varsayıp (3)'ü bir sonraki sayı olan $n+1$ için kanıtlayalım. Ancak bunu yapabilmemiz için, x_n'yle x_{n+1} arasında cebirsel bir ilişki bulmalıyız, yoksa x_n üzerine bildiğimiz bir bilgiden x_{n+1} üzerine bir bilgi çıkaramayız.

Nasıl yukarda $x = (1 - p) + px^2$ eşitliğini bulmuşsak, tamamıyla aynı yöntemle,

$$x_{n+1} = (1-p) + px_n^2 \tag{4}$$

eşitliği bulunur. Artık işimiz iş... (4)'ü ve tümevarım varsayımı olan (3) eşitsizliğini kullanarak,

$$x_{n+1} \leq (1-p)/p$$

eşitsizliğini kanıtlayabiliriz. Şöyle kanıtlarız:

$$x_{n+1} =^{(4)} (1-p) + px_n^2 \leq (1-p) + [(1-p)/p]^2$$
$$= (1-p) + (1-p)^2/p = (1-p)/p.$$

(3) eşitsizliği kanıtlanmıştır.

Şimdi doğru yanıtı bulabiliriz: Eğer $1/2 \leq p$ ise,

$$x =^{(2)} \lim_{n\to\infty} x_n \leq^{(3)} (1-p)/p \leq^{(1)} 1$$

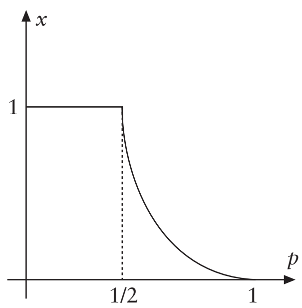
Demek ki, $x \leq (1-p)/p \leq 1$. Bu son eşitsizliklerden, eğer $1/2 \leq p$ ise, x'in $(1-p)/p$ olduğu anlaşılır.

Sonuç olarak,

$$x = \begin{cases} 1 & 0 \leq p \leq 1/2 \text{ ise} \\ (1-p)/p & 1/2 \leq p \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

sonucunu bulduk. Yani amibin soyunu sonsuza değin sürdürebilme olasılığının 0 olmaması için, p, 1/2'den büyük olmalıdır.

x, p'ye bağlı bir fonksiyondur elbet. İşte bu fonksiyonun grafiği:



Yeni Problem. Bu kez yaratığımız p olasılıkla üçe bölünsün, $1 - p$ olasılıkla ölsün. Üçe bölünen bir yaratığın gerçekten olup olmaması beni hiç mi hiç ilgilendirmiyor. Bu yazılık siz de ilgilenmeyin bu dünyasal sorunla.

p olasılıkla üçe bölünen varsayımsal yaratığın soyunu sonsuza dek sürdürme şansı olması için p kaç olmalıdır? Matematikçi okur, yazının süreğini okumadan önce bu soruyu kendi kendine yanıtlamaya çalışmalıdır.

Yaratık bu kez iki yerine üçe bölündüğünden, yaratığın sonsuza dek soyunu sürdürebilme olasılığı daha yüksek olmalıdır.

Az önce çözdüğümüz problem gibi çözülür bu problem de. Ancak hesaplar biraz daha karmaşıktır.

Bu kez, $x = (1 - p) + px^2$ denklemi yerine,

$$x = (1 - p) + px^3 \tag{5}$$

denklemini elde ederiz[8].

Eğer $p = 0$ ise, bir sorun yok: $x = 1$'dir. Bundan böyle p'nin 0 olmadığını varsayalım. O zaman yukardaki denklem, üçüncü dereceden bir denklemdir ve çözmesi ikinci dereceden denklemden biraz daha zordur. Ancak $x = 1$ bir çözüm olduğundan, $px^3 - x + (1 - p)$ polinomu $x - 1$ polinomuna bölünür. Bölme yapıldığında,

$$px^3 - x + (1 - p) = p(x - 1)[x^2 + x - (1-p)/p]$$

elde edilir. Bundan da (5)'in bütün çözümleri bulunur:

$$x = 1$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{\dfrac{4 - 3p}{p}}}{2}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{\dfrac{4 - 3p}{p}}}{2}$$

Üçüncü çözüm her p için negatif bir sayı verdiğinden problemimizin yasal bir çözümü olarak kabul edilemez. Ayrıca, $p < 1/3$ olduğunda, ikinci çözüm 1'den büyüktür ve dolayısıyla bu şıkta o çözüm de yasal bir çözüm değildir. Demek ki $p < 1/3$ olduğunda $x = 1$'dir. Ama $p \geq 1/3$ olduğunda, doğru yanıt birinci eşitlik de olabilir ikincisi de. Hangisi?

Bundan böyle $p \geq 1/3$ eşitsizliğini varsayalım. x_n ilk problemde tanımlanan olasılıklar olsun. Yukarda da gösterdiğimiz gibi, x, x_n'lerin sonsuzda limitidir.

8 x'in, yaratığın soyunu sonsuza dek sürdürememe olasılığı olduğunu okura anımsatırım.

a, ikinci seçenek olsun. Yani

$$a = \frac{-1 + \sqrt{\dfrac{4-3p}{p}}}{2}$$

olsun. $a \leq 1$ eşitsizliğini biliyoruz, bilmiyorsak da kolaylıkla kanıtlayabiliriz. Ayrıca $a^2 + a - (1 - p)/p = 0$ eşitliğini biliyoruz. Bunu ve $x_{n+1} = (1 - p) + px_n^3$ eşitliği kullanılarak, tümevarımla $x_n \leq a$ eşitsizliği kolaylıkla kanıtlanabilir. Kanıtı okura bırakıyorum.

Şimdi, $x = \lim_{n \to \infty} x_n \leq a \leq 1$ elde ederiz. Demek ki $p \geq 1/3$ ise, $x = a$'dır.

Bir Problem Daha. Şimdi yaratığın p_0 olasılıkla öldüğünü, p_1 olasılıkla ne öldüğünü ne de bölündüğünü, p_2 olasılıkla ikiye bölündüğünü ve p_3 olasılıkla üçe bölündüğünü varsayalım. Bu tuhaf yaratığın bu dört seçenekten başka seçeneği olmasın. Demek ki,

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

eşitliği geçerlidir. Yaratığın soyunun sonlu bir zaman sonra kuruma olasılığını (x'i) hesaplayın. Hesaplar biraz daha karmaşık olsa da yukardaki yöntem sonucu veriyor. Şu sonuç bulunması gerekiyor:

Eğer $p_3 \neq 0$ ise,

$$x = \begin{cases} 1 & p_0 \geq 2p_3 + p_2 \quad \text{ise} \\ \dfrac{-p_2 - p_3 + \sqrt{(p_2 + p_3)^2 + 4p_0 p_3}}{2p_3} & p_0 \leq 2p_3 + p_2 \quad \text{ise} \end{cases}$$

Eğer $p_3 = 0$ ise,

$$x = \begin{cases} 1 & p_0 \geq p_2 \ \text{ise} \\ p_0 / p_1 & p_0 < p_2 \ \text{ise} \end{cases}$$

Bu konuda daha geniş bilgiyi [8, 9]'da bulabilirsiniz. Her açıdan daha ilginç olan erkek ve dişi gerektiren üremelerle ilgilenirseniz [10]'a bakın.