

Gerçekten Asal Var mı?

Kendinden ve birden başka sayıya bölünmeyen sayılara asal denir. Örneğin, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 asal sayılardır. Ama 35 asal değildir, çünkü 5'e bölünür. Teknik nedenlerden 1 asal sayılmaz.

Sonsuz tane asal olduğu ta eski Yunanlılardan beri biliniyor. Öklid'in Elemanlar adlı kitabında vardır bunun kanıtı. Öklid'in aktardığı bu kanıt dünyanın en güzel kanıtlarından biri olarak kabul edilir. [5]'teki *Asal Sayılar* başlıklı yazıda bu güzel kanıt bulabilirsiniz.

100'den küçük 25 tane asal sayı vardır. İşte o asal sayılar: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Demek ki, yüzden küçük sayıların yüzde 25'i, yani dörtte biri asaldır.

Bir başka deyişle, ilk yüz sayı arasından rastgele bir sayı seçecek olursak, bir asal sayı seçme olasılığımız $1/4$ 'tür, yani yüzde 25'tir, yani $0,25$ 'tir¹.

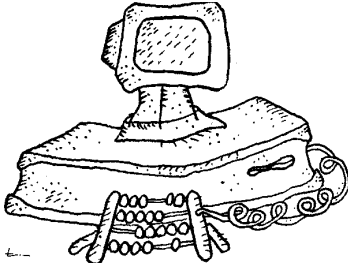
1000'den küçük kaç tane asal vardır? Hepsini teker teker bulabiliriz. Bir bilgisayar zaman kazandırır. 1000'den küçük asallar şunlar:

1 Matematikte olasılıklar 1 üzerinden hesaplanır.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997.

Tam 168 tane var. Demek ki, 1'le 1000 arası rastgele bir sayı seçecek olsak, bir asal sayı seçme olasılığımız $168/1000$ 'dir, yani $0,168$ 'dir.

Görüldüğü gibi ilk yüz sayıda asallar daha yoğun: İlk yüz sayıda asal bulma olasılığı, ilk bin sayıda asal bulma olasılığından daha fazla.



Eğer n bir tamsayıysa, $p(n)$, n 'den küçük asal sayı sayısı olsun. Örneğin, $p(100) = 25$ ve $p(1000) = 168$.

Asalların ne kadar yoğun olduğunu anlamak istiyoruz, yani $p(n)/n$ sayısı ile ilgileniyoruz. Asal sayıların yoğunluğunu ölçen bu sayılara $y(n)$ diyelim. Bu sayı, n 'den küçük rastgele seçilmiş bir sayının asal olma olasılığıdır. Yukardaki deneylerden,

$$y(100) = p(100)/100 = 0,25$$

$$y(1000) = p(1000)/1000 = 0,168$$

olduğu anlaşılıyor.

Bu yoğunlukları bilgisayarımda hesaplattırdım. İşte birkaç sonuç:

$y(100)$	$= 25/100$	$= 0,25$
$y(200)$	$= 46/200$	$= 0,23$
$y(300)$	$= 62/300$	$= 0,206666...$
$y(400)$	$= 78/400$	$= 0,195$
$y(500)$	$= 95/500$	$= 0,19$
$y(600)$	$= 109/600$	$= 0,181666...$
$y(700)$	$= 125/700$	$= 0,17857...$
$y(800)$	$= 139/800$	$= 0,17375$
$y(900)$	$= 154/900$	$= 0,17111...$
$y(1000)$	$= 168/1000$	$= 0,168$
$y(2000)$	$= 303/2000$	$= 0,1515$
$y(3000)$	$= 430/3000$	$= 0,143333...$
$y(4000)$	$= 550/4000$	$= 0,1375$
$y(5000)$	$= 669/5000$	$= 0,1338$
$y(6000)$	$= 783/6000$	$= 0,1305$
$y(7000)$	$= 900/7000$	$= 0,12857...$
$y(8000)$	$= 1007/8000$	$= 0,125875$
$y(9000)$	$= 1117/9000$	$= 0,1241111...$
$y(10000)$	$= 1229/10000$	$= 0,1229$
$y(20000)$	$= 2262/20000$	$= 0,1131$
$y(30000)$	$= 3245/30000$	$= 0,1081666...$
$y(40000)$	$= 4203/40000$	$= 0,105075$
$y(50000)$	$= 5133/50000$	$= 0,10266$
$y(60000)$	$= 6057/60000$	$= 0,10095$
$y(70000)$	$= 6935/70000$	$= 0,0990714...$
$y(80000)$	$= 7837/80000$	$= 0,0979625$
$y(90000)$	$= 8713/90000$	$= 0,0968111...$
$y(100000)$	$= 9593/100000$	$= 0,09593$

Yoğunlukların giderek küçüldüğünden artık hiç kuşkumuz yok sayılır. Belli ki asalların yoğunluğu gitgide azalıyor.

Bu yoğunluk nereye dek küçülüyor? Örneğin 0,08'in ya da 0,09'un altına iniyor mu? İniyorsa, 0,01'in altına iniyor mu? Ya daha aşağılara?

Evet iniyor. Her pozitif sayının altına iniyor ve sonsuzda 0 oluyor. Bunun kanıtını burada veremeyeceğiz ne yazık ki.

Bu şu demektir: Tüm doğal sayılar arasından rastgele seçilmiş bir sayının asal olma olasılığı 0'dır. Bir başka deyişle, sonsuz tane asal vardır, ama asalların sayısı, tüm sayılarla karşılaştırıldığında, o kadar da fazla değildir.