Rastgele Bir Sayı Seçme ya da Olasılık Nedir

Birçok yazımda olasılık sorusu sordum. Bu yazımda soru sormayacağım, sadece olasılığın matematiksel tanımını vereceğim.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ve 9 sayıları arasından rastgele bir sayı çekecek olursanız, her bir sayının çekilme olasılığı 1/9'dur. Çünkü çekebileceğimiz 9 sayı vardır ve herbirinin çekilme olasılığı aynıdır.

Öte yandan, kültürel nedenlerden bazı sayılar insanlar tarafından daha çok tutulurlar. İsterseniz deneyin. Kalabalık bir ortamda, örneğin bir sınıfta, herkesin tek basamaklı bir sayı tutmasını isteyin, en çok 7'nin tutulduğunu göreceksiniz.

"Sayılar Biri Sever" başlıklı yazımda, ülke nüfuslarının, dağ yüksekliklerinin, nehir uzunluklarının, borsa hissesi fiyatlarının rastgele sayılar olmadığından sözetmiştim, çünkü (örneğin) bu sayıların ilk basamağı büyük bir çoğunlukla 1 oluyordu.

Ama biz, kültürel ve fiziksel etkenleri silip sayılarımızı "gerçekten" rastgele çekelim. Örneğin, bir torbaya bu sayıları koyalım, torbayı iyicene karıştıralım, sonra elimizi torbaya daldırıp sayılardan birini çekelim. İşte size rastgele bir sayı... Aşağı yukarı rastgele...

Eğer 100 sayımız varsa ve bu sayılardan birini gerçekten rastgele çekiyorsak, her sayının çekilme olasılığı 1/100'dür.

İlk 100.000 sayı arasından rastgele birini çekersek, her sayının çekilme olasılığı 1/100.000'dir. Örneğin 99999 ile 42671 sayıları arasında çekilme olasılığı bakımından bir fark yoktur, her ikisinin de çekilme olasılığı aynıdır.

Milli Piyango biletleri arasında da bir fark yoktur, her numaranın çekilme olasılığı aynıdır. Bu yüzden bazı numaraları, örneğin 123456789 numaralı bileti, çıkmaz diye satın almak istememenin ne bilimsel ne de matematiksel bir gerekçesi olabilir.

Sanırım buraya kadar her şey açık seçiktir.

Aslında her şey açık seçik değil... Olmaması gerekir. Rastgele bir sayı seçmek oldukça zor bir iştir, örneğin bilgisayara rastgele bir sayı seçtirmek neredeyse başlı başına bir bilim dalıdır. Belki bir gün bu konudan da söz ederim bir yazımda. Rastgele sayının nasıl seçildiği önemli değil bizim açımızdan... Biz, rastgele bir sayının seçilebildiğini varsayacağız.

Şimdi, bütün doğal sayılar arasından rastgele bir sayı seçelim. Yani 0, 1, 2, 3, ... gibi pozitif tamsayılar arasından... Sonsuz tane doğal sayıyı bir torbaya koyacağız, torbayı iyice (ama iyice) karıştıracağız ve elimizi torbaya daldırıp, sayılardan birini rastgele çekeceğiz.

Herhangi bir sayının bir başka sayıya göre ayrıcalığı yok, 1'in de, 2'nin de, 4782563903'ün de çekilme olasılığı aynı...

O zaman, her sayının çekilme olasılığı 0'dır.

Bu son dediğimizi kanıtlayalım. Belli bir sayının çekilme olasılığına ε diyelim[1]. Bir sayının bir başka sayıya göre çekilme açısından herhangi bir ayrıcalığı olmadığını varsaydığımızdan, her sayının çekilme olasılığı aynıdır, yani ε'dur. İlk 1000 sayıdan birinin çekilme olasılığıysa 1000ε'dur. İlk 100.000 sayıdan

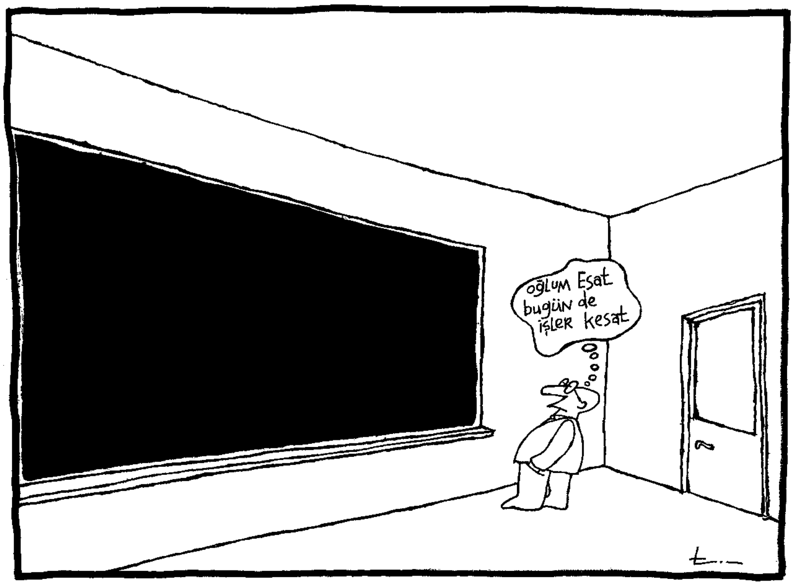
1 ε, Yunan alfabesinin ε harfi. Epsilon diye okunur. Bu yazıda "sayı", doğal sayı anlamına kullanılacak.

birinin çekilme olasılığı da 100.000ε'dur. İlk 1.000.000 sayıdan birinin çekilme olasılığı 1.000.000ε'dur. Toplam olasılık 1 olduğundan, tüm bu olasılıklar en fazla 1 olabilir. Yani n ne olursa olsun, $n\varepsilon$ en fazla 1 olabilir. Öte yandan, $\varepsilon > 0$ olsaydı, belli bir n sayısı için $n\varepsilon$ sayısı 1'i aşardı. Demek ki $\varepsilon = 0$ imiş...

Her sayının çekilme olasılığı aynıysa, sonsuz sayı arasından herhangi bir sayının çekilme olasılığının 0 olması gerektiğini kanıtladık.

Bu sonuç biraz tuhaf gelebilir. Örneğin 253'ü çekme olasılığı 0, yani 253'ü çekemezsiniz!.. Bana, "Niye çekemeyecekmişim ki, istersem bal gibi de çekebilirim," diyebilirsiniz. Evet, isterseniz çekebilirsiniz. Ama ben size, "İsterseniz çekemezsiniz" demedim ki, "Rastgele çekemezsiniz" dedim. İşin püf noktası "rastgele" sözcüğünde.

Elbet, rastgele sayı çektiğinizde bir sayı gelecek, ama bu sayıyı önceden bilme olasılığınız 0'dır. Hatta, çekiliş yapılmadan önce, 1 değil, 1000 tahminde bulunsanız, bu 1000 sayıdan birinin çıkma olasılığı da 0'dır.



Diyelim bir sayı kümemiz var. Bu sayı kümesine X adını verelim. Eğer X sonlu bir kümeyse, rastgele çekilmiş bir sayının X'te olma olasılığının 0 olduğunu yukarda gördük. Peki ya X sonsuz bir kümeyse? O zaman olasılık kaçtır, ya da – daha da temel bir soru – böyle olasılıktan söz edebilir miyiz? "Rastgele çekilen bir sayının X kümesinde olma olasılığı" ne demektir? Bunun matematiksel tanımı var mıdır, varsa nedir?

Örneğin X çift sayılar kümesiyse, rastgele çekilmiş bir sayının X'te olma, yani çift olma olasılığı 1/2'dir, çünkü herkesin bildiği gibi, sayıların "yarısı" çift, "yarısı" tektir. Sezgisel olarak doğru olan bu önermeyi birazdan matematiksel olarak kanıtlayacağız. Ama önce "X'te olma" olasılığının matematiksel tanımını verelim.

$[0, n) = \{0, 1, 2, \ldots\ n–1\}$ olsun. Eğer rastgele çekilişi bu kümeden yapacak olursak, rastgele çekilen sayının X kümesinde olma olasılığı, X kümesindeki n'den küçük sayı sayısı bölü

$$\frac{|X \cap [0,n)|}{n}$$

n'dir, yani,

dir. Bu sayıya $p_n(X)$ diyelim. Demek ki, n'den küçük sayılar arasından rastgele çekilen bir sayının X kümesinde olma olasılığı $p_n(X)$'dir.

Rastgele çekilmiş bir sayının X'te olma olasılığını $p_n(X)$ sayılarının sonsuzda aldıkları değer, yani

$$\lim_{n \to \infty} p_n(X)$$

olarak tanımlayabiliriz. Bu sayıya $p(X)$ diyelim.

Bu tanımı kabul edelim: Rastgele çekilen bir doğal sayının X kümesinde olma olasılığı $p(X) = \lim_{n \to \infty} p_n(X)$ olarak tanımlansın.

Önce, X kümesi sonluysa, rastgele bir sayının X'te olma olasılığının 0 olduğunu, yani $p(X) = 0$ eşitliğini kanıtlayalım. X sayı kümesi sonlu olduğundan, X'teki sayıların hepsi belli bir sayıdan, diyelim m'den daha küçüktür. O zaman, m'den büyük her n sayısı için,

$$X \subseteq [0, n)$$

dir ve

$$p(X) = |X \cap [0, n)|/n = |X|/n \leq m/n$$

dir. m sabit olduğundan,

$$p(X) = \lim_{n \to \infty} p_n(X) \leq \lim_{n \to \infty} m/n = 0$$

dır, yani

$$p(X) = 0$$

dır.

Şimdi X çift sayılar kümesi olsun. Bu kez $p(X) = 1/2$ eşitliğini kanıtlayacağız. $X \cap [0, n)$ kümesinin eleman sayısını bulalım. $X \cap [0, n)$ kümesinde, eğer n tek sayıysa $(n+1)/2$ tane, eğer n çift sayıysa $n/2$ tane sayı vardır. Demek ki, $p_n(X)$, bir $(n + 1)/2n$ oluyor, bir 1/2.

$p_n(X)$ dizisi şöyle başlıyor:

0, 1, 1/2, 2/3, 1/2, 3/5, 1/2, 4/7, 1/2, 5/9, 1/2, 6/11, 1/2, 7/13...

Bu dizinin limitinin 1/2 olduğu belli. Demek ki, rastgele çekilen bir doğal sayının çift olma olasılığı gerçekten 1/2'dir.

Dileyen okur, X, 3'e bölünen sayılar kümesi olduğunda, $p(X) = 1/3$ eşitliğini kanıtlayabilir.

Yine bu olasılık ölçümüyle, bir sayının 4, 9, 25, 49 gibi bir kareye bölünmeme olasılığı $6/\pi^2$'dir... Rastgele iki sayının da birbirine asal olma olasılığı aynıdır. Bu sonuçlar Hardy ve Wright'ın yazdığı "An Introduction to the Theory of Numbers" kitabının 332 ve 333'uncu teoremleridir. Söz açılmışken, birinci basımı 1938'de yapılan bu kitaptan 20 küsur yıldır büyük bir zevk aldığımı belirtmeliyim, herkese öneririm.

Yukardaki olasılık tanımı, olası tanımlardan sadece biridir ve bir anlamda en doğalıdır. Başka olasılık ölçümleri de olabilir. Hatta bu ölçümler de oldukça doğal bulunabilir. Örneğin, küçük sayıların seçilme olasılığının daha büyük olması gerektiğini düşünebiliriz. $p(n)$, n sayısının çekilme olasılığıysa,

$$p(0) = 1/2$$

$$p(1) = 1/4$$
$$p(2) = 1/8$$
$$p(3) = 1/16$$
$$p(4) = 1/32$$
$$p(5) = 1/64$$
$$p(6) = 1/128$$
$$p(7) = 1/256$$
$$\ldots$$

ve genel olarak,

$$p(n) = 1/2^{n+1}$$

$$p(X) = \sum_{x \in X} \frac{1}{2^{x+1}} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i \in X \cap [0,n]} \frac{1}{2^{i+1}}$$

olarak düşünebiliriz. O zaman,
olarak tanımlanır.

Dikkat edilirse, bu son tanımla $p(\mathbb{N}) = 1$'dir. (Burada $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini simgeliyor.) Yani bir sayı seçme olasılığı 1, yani yüzde yüz, olması gerektiği gibi...

Öte yandan, bu olasılık tanımıyla, 0'ı seçme olasılığı 1/2, eskisi gibi 0 değil.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{2n+1}} + \ldots = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{2}{3}.$$

Çift sayı seçme olasılığı,
dür. Tek sayı seçme olasılığı da 1 – 2/3 = 1/3.

Bu olasılık ölçümüyle, rastgele seçilen bir sayının asal olma

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{12}} + \ldots = \sum_{p \text{ asal}} \frac{1}{2^{p+1}}.$$

olasılığı:

Bu sayı en fazla, 1/3 – 1/4 + 1/8 = 5/24'dür (çünkü çekilen sayının tek sayı olma olasılığı 1/3, 1 olma olasılığı 1/4, 2 olma olasılığı 1/8), ama kesinlikle $1/2^3 + 1/2^4 + 1/2^6 + 1/2^8 + 1/2^{12}$ sayısından büyüktür. Bu olasılığın kaç olduğunu tam olarak bilmiyorum, sanırım kimse bilmiyor.

Başka olasılık tanımları da olabilir. Örneğin, olasılık,

$$p(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{x\in X\cap[1,\,n]} 1/x}{\sum_{i=1}^{n} 1/i}$$

olarak tanımlanabilir.

Bir olasılık tanımından ne isteriz? Matematikte hep olduğu gibi, ne istemek istersek onu isteriz. Genellikle bir olasılıktan şunlar istenir:

1. Olasılık 0'la 1 arasında değişen bir sayı olsun. Matematikçesi: $0 \le p(X) \le 1$.

2. Toplam olasılık 1 olsun. Yani olaylardan herhangi birinin gerçekleşme olasılığı 1 olsun. Bu, mutlaka bir olay gerçekleşecek anlamına gelir. Yukardaki örneklerde, mutlaka bir sayı çekilecek demektir bu. Matematikçesi: Eğer A bütün olaylar kümesiyse (yukarda $A = \mathbb{N}$), $p(A) = 1$.

3. Eğer $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, X_n ayrık kümeleri simgeliyorsa, bir olayın X_n kümelerinden birinde olma olasılığı, olayın X_n kümesinde olma olasılıklarının toplamıdır. Matematiksel for-

$$p(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p(X_n)$$

mülüyle,

Yukarda verdiğimiz örneklerin hepsi bu sonuncu koşulu sağlamıyor. Onlar bu anlamda olasılık değillerdir ama öyleymiş gibi sözedilir.

Yukardaki üç koşulu sağlayan bir fonksiyona ***olasılık fonksiyonu*** denir. Daha önce olasılığın matematiksel tanımını bilmiyordunuz, artık biliyorsunuz. Bundan böyle size bir olayın olasılığı sorulduğunda, "Olasılık fonksiyonumuz ne?" diye sorabilirsiniz.