

Sonlu Bir Geometri

Bugün profesyonel bir matematikçinin nasıl kendi kendine soru sorabileceğine örnek vereceğim, yani gerçek matematik yapacağız. Umarım hoşunuza gider.

Soracağım soruyu geçen yaz İspanya’da bir arkadaşım sormuştu. Güzel bir İspanyol kaldırım kahvesinde şarap içip sohbet ediyorduk arkadaşlarla. Türkiye’de popüler matematik yazıları yazdığımı, bildikleri güzel sorular varsa bana söylemelerini istedim. Biri birazdan okurlara soracağım soruyu sordu. Soruya bayıldım, ama yanıtını hemen istemedim. Yanıtını kendim arayarak bulamadığım bir soruyu okurlarıma sormam. Yanıtı bulmak için en az bir saat uğraştığımı itiraf etmeliyim. Salt ben değil, soruyu soran dışında hepimiz düşündük. Demek istediğim, profesyonel matematikçilerin ancak saatlerce düşünüp yanıtlayabildiği bir soruyla karşı karşıyasınız.

Matematikte, sık sık, çok iyi bilinen bir nesnenin birkaç özelliği ele alınır ve bu özellikleri olan başka nesnelere aranır. Böylece yeni ilginç matematiksel nesnelere keşfedilir. Bugün, düzlemin iki özelliğini ele alacağız ve bu iki özelliği bulunan başka nesnelere arayacağız.

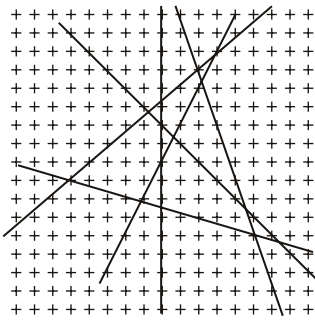
Bildiğimiz düzlemin nokta ve doğruların aşağıdaki şu iki özelliği vardır:

- 1) Her iki noktadan bir doğru geçer.
- 2) Her doğrunun üstünde en az üç nokta vardır.

Bu iki özelliği herkes bilir.

Bu yazının konusu, yukardaki iki koşulu sağlayan ve düzlemin birtakım nokta ve doğrularından oluşan nokta ve doğru kümeleri bulmak.

Bu iki özelliği olan bir örnek verdim, o örnekte düzlemin her noktasını ve her doğrusunu almıştık. Bir başka örnek daha vereyim. Vereceğim örnek, düzlemin bazı nokta ve doğrularından oluşacak. Koordinatları tamsayı olan noktaları ve bu noktalardan geçen tüm doğruları ele alalım. Bu nokta ve doğrulardan oluşan kümeye K adını verelim. İşte K kümesinin birkaç ögesi:



Bir noktanın K kümesinde olması için, o noktanın her iki koordinatının da tamsayı olması gerekmektedir. Bir doğrunun K kümesinde olması için de, o doğrunun K kümesinin en az iki noktasından geçmesi gerekmektedir.¹

Tanımlamış olduğum K kümesinin nokta ve doğruları da yukardaki iki özelliği sağlarlar, yani,

- 1) K 'nın her iki noktasından yine K 'da olan bir doğru geçer.
- 2) K 'nın her doğrusunun üstünde yine K 'da bulunan en az üç nokta vardır.

Bir başka örnek daha ele alalım. K kümesi bir doğrudan ve bu doğru üstünde bulunan en az üç noktadan oluşsun. Elbette K kümesinin de yukardaki iki özelliği vardır.



¹ Cebirsel olarak ifade etmek istersek, A kümesi, a , b ve c tamsayıları için denklemi $ax + by + c = 0$ olan doğrulardan oluşur.

Sorumuz şu: K , bildiğimiz düzlemin birtakım nokta ve doğrularından oluşan bir kümeysse ve K 'de en az iki doğru varsa ve K yukarıdaki iki özelliği sağlıyorsa², K sonlu olabilir mi? Olabilirse, bir örnek verin; olamazsa neden olamayacağını açıklayın (yani olamayacağını kanıtlayın.)

K 'nın nokta ve doğrularının düzlemde olması (düzleme çizilebilmesi) önemlidir. Yoksa 7 noktalı ve 7 “doğrulu” bir örnek uydurmak pek zor değildir. İşte o örnek: Noktalarımıza A, B, C, D, E, F, G diyelim. Doğrularımız da aşağıdaki nokta kümeleri olsunlar:

$\{A, B, C\}$

$\{A, G, D\}$

$\{A, F, E\}$

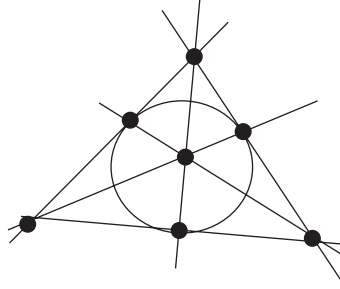
$\{C, D, E\}$

$\{B, G, E\}$

$\{C, G, F\}$

$\{B, G, E\}$

Bu örneği bir düzlemde çizmek isterseniz, bir tek doğru olması gerektiğini, yani 7 noktanın da aynı doğru üstünde olmak zorunda kaldığını görürsünüz. Eğer en az iki doğru istiyorsak, doğruların biri (yandaki çember gibi) yamuk olmak zorundadır:

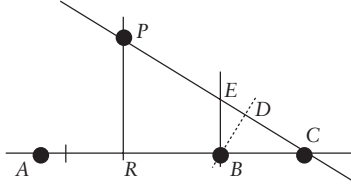


Bildiğimiz düzlemde yamuk doğru olamayacağından bu örnek geçerli değildir. Benim istediğim, düzleme çizilebileceğimiz ve doğruların gerçekten doğru olduğu bir örnektir.

Sorumun yanıtını vereyim: Yukardaki iki özelliği sağlayan sonlu bir K kümesi yoktur. Neden?

² Yani K 'nın her iki noktasından geçen doğru K 'dadır ve K 'daki her doğrunun üstünde gene K 'dan en az üç nokta vardır.

Bir an için yukardaki iki özelliği sağlayan sonlu bir K kümesinin olduğunu varsayalım. Bu varsayımdan bir çelişki elde edeceğiz. K kümesi düzlemin sonlu sayıda nokta ve doğrularından oluşuyor, bu önemli, çelişki bundan gelecek.



Yandaki şekle bakarak okumayı sürdürün. K kümesi sonlu olduğundan, K kümesinde birbirine **en yakın** olan, ama aralarındaki uzaklık 0 olmayan bir nokta ve bir doğru vardır. O noktaya P , doğruya da ℓ adını verelim. P noktası ℓ doğrusunun üstünde değil. P 'den ℓ 'ye bir dik inelim. P 'nin ℓ 'deki izdüşümüne R diyelim. ℓ doğrusunun üstünde K kümesinde olan en az üç nokta olmalı, diyelim A , B ve C noktaları. Bu üç noktadan ikisi R 'nin bir yanında, biri de öbür yanında olmak zorundadır elbet (en kötü olasılıkla bu üç noktadan biri R olabilir, ama bunun önemi yok.) Bu üç noktanın yukardaki şekildeki gibi dağıldığını varsayalım: ikisi sağında, biri solunda. B noktasıyla CP doğrusunun K kümesinde olduğuna dikkatinizi çekerim. Şimdi, B noktasının CP doğrusuna olan uzaklığı (yani $|BD|$ uzaklığı), P noktasının ℓ doğrusuna olan uzaklığından (yani $|PR|$ 'den) daha küçüktür, çünkü,

$$|BD| < |EB| < |PR|$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Ama hani P noktasının ℓ doğrusuna olan uzaklığı K 'deki noktaların yine K 'deki doğrulara olan uzaklıkların en küçüğüydü? Bir çelişki elde ettik. Demek ki öyle bir K kümesi yokmuş. (Olsaydı evren tepemize yıkılırdı.)

