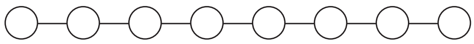
# Sopayla Sayalım!

Bir tahta parçası alalım. Bu tahta parçası üzerinde eşit aralıklı ve biri sopanın başına biri de sonuna gelmek üzere $n$ tane çentik açalım. Örneğin $n = 8$ ise, tahta parçamız şöyledir:



Bu $n$ çentiğin $p$ tanesini boyayacağız. Burada $p$, $n$'den küçük ya da $n$'ye eşit bir sayı elbet. Örneğin $n = 8$ ve $p = 3$ ise, sopayı şöyle boyayabiliriz:

Boyamak için başka çentikler de seçebilirdik. Örneğin yukardaki çentikler yerine dördüncü, beşinci ve altıncı çentikleri boyayabilirdik.

Sekiz çentik arasından boyanacak üç çentik seçeceğiz. Kaç türlü seçebiliriz? Bu sorunun yanıtını liseye giden her öğrencinin bilmesi gerekir, ancak deneyimim, yanıtı pek az öğrencinin bildiğinigösteriyor. Doğru yanıt, "sekizin üçlüsü"denilen $\binom{8}{3}$ sayısıdır, yani $8! \times 3!/5!$ dir. Burada,

$$8! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$$
$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$$
$$3! = 1 \times 2 \times 3$$

dir. Demek ki, sekiz çentik arasından üçünü,

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1} = 8\times 7 = 56$$

çeşitli biçimde seçebiliriz.

Genel olarak, $n$ çentik arasından $p$ tanesini

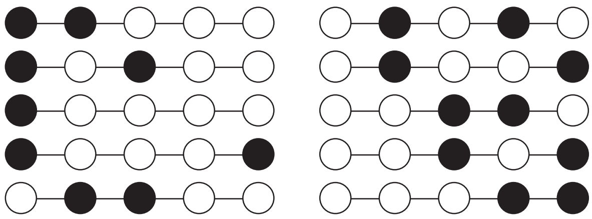
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

("$n$'nin $p$'lisi") biçimde seçebiliriz. Bu sonuç lise kitaplarında bulunmalıdır. Yoksa, [6]'nın *Pokerin Matematiği* başlıklı yazısına bakabilirsiniz. O yazıda formülün doğruluğu ayrıca kanıtlanmıştır.

Örneğin $n = 5$ ve $p = 2$ olsun ve beş çentikli bir sopa üzerinde kaç türlü iki çentik seçebileceğimizi hesaplayalım. Yukarda dediğim gibi,

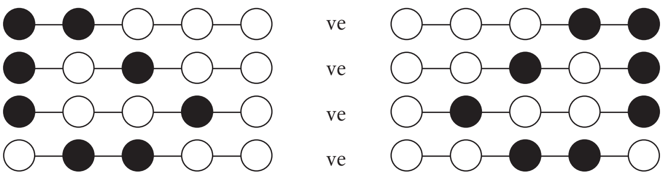
$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5\times 4}{2} = 10$$

türlü iki çentik seçebiliriz. İşte o on seçim:

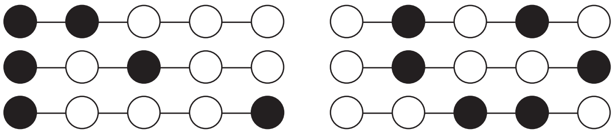


Buraya değin bir sorun olmaması gerekir. Ama var!

Sorun şu: sopayı 180 derece çevirdiğimizde, yani sopanın solunu sağına, sağını soluna getirdiğimizde, ayrı gibi gözüken iki boyanış türünün aslında bir olduğunu görürüz. Sopanın başı sonu belli değil ki! Örneğin, yukardaki ikisi boyalı beş çentikli on sopadan,




sopaları arasında bir ayrım yapamayız. Bu sopalar birbirinin simetriğidir (bakışığıdır) ve bu simetrik sopaları bir saymak zorundayız. O zaman, on sopa arasından iki tane olanlarından birini atıp geriye kalanlara bakalım:



**Soru.** *Simetrik boyanmış sopaları bir sayarsak, $n$ çentikli sopanın $p$ çentiğini kaç türlü boyayabiliriz?*

Eğer $n = 5$, $p = 2$ ise, yanıtın 6 olduğunu yukarda gördük.

**Yanıt.** Simetrik boyalı sopaları ayrı ayrı sayarsak yanıtın

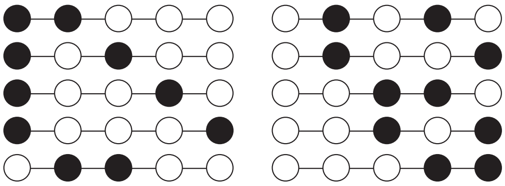
$$\binom{n}{p}$$

olduğunu biliyoruz. Bu,

$$\binom{n}{p}$$

sopayı içeren kümeye $A$ adını verelim.

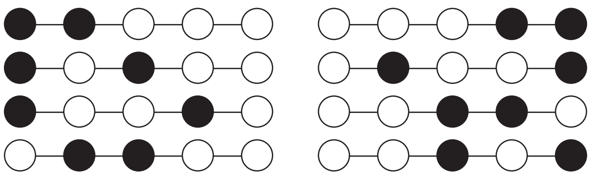
Örneğin, $n = 5$, $p = 2$ ise, yukarda da gördüğümüz gibi, $A$ kümesinin öğeleri şunlardır:



$A$ kümesinin öğelerini iki sınıfa ayıralım: kendi kendisinin simetriği olanlar ve bir başka simetriği olanlar. Birinci kümeye

*B* diyelim, ikinci kümeye *C*. Örneğin, $n = 5$, $p = 2$ ise, *B* kümesi aşağıdaki iki öğeden oluşmuştur:

ve *C* kümesi aşağıdaki 8 öğeden oluşmuştur:



Eğer *A*, *B* ve *C* kümelerinin öğe sayısını $|A|$, $|B|$ ve $|C|$ olarak gösterirsek, bizim bulmak istediğimiz sayı,

$$x = |B| + |C|/2 \tag{1}$$

sayısıdır.

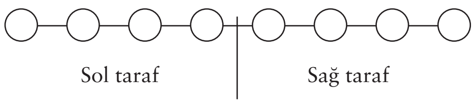
Ne biliyoruz?

$$\binom{n}{p} = |A| + |B| + |C| \tag{2}$$

eşitliğini biliyoruz. Bize yeterli değil. Eğer $|B|$ sayısını bulabilirsek, (2) eşitliğini kullanarak $|C|$ sayısını da bulabiliriz arkasından da (1) eşitliğini kullanarak aradığımız $x$ sayısını bulabiliriz. Demek ki *B* kümesinin öğe sayısını bulmak kalıyor.

*B* kümesinin öğe sayısı, $n$ ve $p$ sayılarının tekliği ve çiftliğine göre değişir.

***n* ve *p* Çift Sayılarsa.** İlk olarak $n$ ve $p$ sayılarının çift olduklarını varsayalım. *B* kümesinin her öğesi simetrik biçimde boyanmıştır. Demek ki boyalı $p$ çentiğin yarısı sopanın solunda, yarısı sağındadır ve bu iki yarı birbirinin simetriğidir, bir başka deyişle, sol tarafın nasıl boyandığını biliyorsak, sağ tarafın da nasıl boyandığını biliriz.



*n* çift olduğundan, sopanın tam ortasında çentik yoktur ve bu çentiklerin *n*/2 tanesi soldadır. Soldaki bu *n*/2 çentikten *p*/2 tanesini seçeceğiz ve aynı seçimin simetriğini sağ tarafta da yapacağız. Soldaki *n*/2 çentikten kaç türlü *p*/2 çentik seçebiliriz?

$$\binom{n/2}{p/2}$$

türlü elbette. Demek ki, *B* kümesinde

$$\binom{n/2}{p/2}$$

tane öğe varmış. Yani

$$|B| = \binom{n/2}{p/2}$$

imiş. Bundan da, (2)'yi kullanarak,

$$|C| = \binom{n}{p} - \binom{n/2}{p/2}$$

buluruz. Şimdi, (1)'i kullanarak *x*'i bulabiliriz:

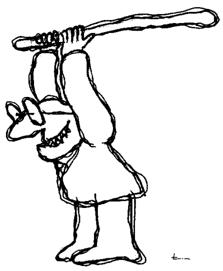
$$x = |B| + \frac{|C|}{2} = \frac{\binom{n}{p} + \binom{n/2}{p/2}}{2}.$$

***n* Çift, *p* Tekse.** Bu durumda sopanın simetriği olmaz, yani $|B| = 0$'dır. Demek ki,

$$x \overset{(1)}{=} \frac{|C|}{2} \overset{(2)}{=} \frac{|A|}{2} = \binom{n}{p}/2$$

dir.

***n* Tek, *p* Çiftse.** Şimdi *n*'nin bir tek sayı olduğunu varsayalım. O zaman sopanın tam ortasında bir nokta vardır ve çentiklerin $(n-1)/2$ tanesi solda, $(n-1)/2$ tanesi sağdadır. *p* çift olduğundan, *B* kümesinin hiçbir sopasının ortasındaki çentik boyalı olamaz (yoksa çentikleri simetrik bir biçimde boyayamayız.) Demek ki *B*'deki her sopanın boyalı çentiklerin yarısı, yani *p*/2 tanesi solda, öbür yarısı sağda, solun tam simetriğinde olmalıdır. Soldaki ($n$–1)/2 çentikten boyanacak $p$/2 tanesini seçeceğiz. Kaç türlü seçebiliriz?



$$\binom{(n-1)/2}{p/2}$$

türde elbet. Demek ki,

$$|B| = \binom{(n-1)/2}{p/2}$$

dir. Bundan da, (2)'yi kullanarak,

$$|C| = \binom{n}{p} - \binom{(n-1)/2}{p/2}$$

buluruz. Şimdi, (1)'i kullanarak $x$'i bulabiliriz:

$$x = |B| + \frac{|C|}{2} = \frac{\binom{n}{p} + \binom{(n-1)/2}{p/2}}{2}.$$

***n* ve *p* Tekse.** Bu durumda, $B$ kümesinin her sopasının tam ortasındaki çentik boyanmalıdır. Çünkü $p$ tektir ve tam ortadaki çentik boyanmazsa, boyalı çentiklerin yarısı solda, yarısı sağda olamaz. Demek ki, soldaki ($n$–1)/2 çentikten ($p$–1)/2 tanesi boyalıdır. Soldaki bu ($n$–1)/2 çentikten kaç türlü boyanacak ($p$–1)/2 çentik seçebiliriz?

$$\binom{(n-1)/2}{(p-1)/2}$$

tane elbet. Demek ki

$$|B| = \binom{(n-1)/2}{(p-1)/2}$$

$|B|$ = 'dir. Bundan da, (2)'yi kullanarak,

$$|C| = \binom{n}{p} - \binom{(n-1)/2}{(p-1)/2}$$

buluruz. Şimdi, (1)'i kullanarak $x$'i bulabiliriz:

$$x = |B| + \frac{|C|}{2} = \frac{\binom{n}{p} + \binom{(n-1)/2}{p/2}}{2}.$$

**Sonuç.** $n$ ve $p$ sayılarının tekliği ve çiftliğine göre dört değişik sonuç bulduk. Ama sonuçlara biraz dikkatle bakarsak bu dört değişik sonucu 2'ye indirebiliriz:

$$x = \begin{cases} \dfrac{\binom{n}{p}}{2} & \text{eğer } n \text{ çift ve } p \text{ tekse} \\ \dfrac{\binom{n}{p} + \binom{[n/2]}{[p/2]}}{2} & \text{öbür durumlarda.} \end{cases}$$

Burada $[y]$ simgesi, $y$ sayısının tam kısmını simgelemektedir. Örneğin $[7,5] = 7$'dir.