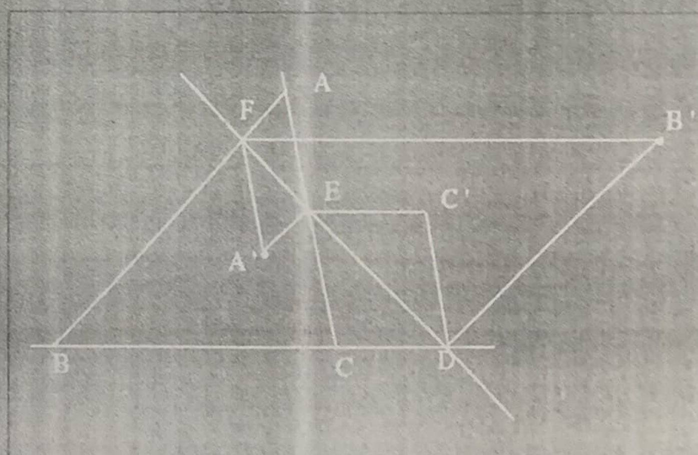
Matematik
D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR



ŞUBAT 1994 / CİLT : 4 / SAYI : 1

MATEMATİK DÜNYASI

SAHİBİ
TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ
Adına
Başkan
TOSUN TERZİOĞLU

EDİTÖR
ŞAFAK ALPAY

YAYIN KURULU
TURGAY KAPTANOĞLU, HÜSEYİN DEMİR,
ALİ DOĞANAKSOY, ALBERT ERKİP,
MAHMUT KUZUCUOĞLU,
MEFHARET KOCATEPE

DİZGİ
ZEHRA ÖNER TUĞLU

BASKI
TÜRK HAVA KURUMU MATBAASI

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafından, UNESCO'nun desteği ile iki ayda bir yayınlanmaktadır. (Yılda 5 sayı)

MATEMATİK DÜNYASI Cilt: 1 Sayı: 2 yıllık dergisinin Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının 20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Bşk. K.l.Şb. Md. 5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI

Yurtiçi yıllık 75.000.-TL., Yurtdışı yıllık 200.000.-TL., Yıllık abone ücretinin Posta Çeki 522253 No.lu hesaba veya İş Bankası ODTÜ Ankara Şubesi'ndeki 4229-0343587 numaralı hesaba yatırılarak, dekontun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.

İLAN KOŞULLARI

Arka kapak, tam sayfa renkli: 3.000.000.-TL.
Dergi içi, tam sayfa renkli: 2.000.000.-TL.
Dergi iç tam sayfa siyah-beyaz 1.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa renkli: 1.000.000.-TL.
Dergi içi, yarım sayfa siyah-beyaz : 500.000.-TL.

ADRES
(Abone olmak için)

Atatürk Bulvarı 95/1105
(Gökdelen Kızılay 06650 ANKARA
Tel: (4) 418 79 45, P.K.: 424 Kızılay

(İçerikle ilgili)
ODTÜ Matematik Bölümü 06531 ANKARA
Tel: (4) 210 10 00 / 2978 - 2979

İÇİNDEKİLER

MATEMATİK DÜNYASI'NDAN

Yazı Kurulu

Bu sayı ile dördüncü yayın yılına başlıyoruz. İlk üç cildin gerçekleşmesinde emeği geçen herkese ve özellikle Yazı Kurulu'ndan ayrılan ODTÜ öğretim üyeleri Okay Çelebi, Cemal Koç ve Cem Tezer'e değerli katkıları için teşekkür ederiz. Cemal Koç bu akademik yılı Doğu Akdeniz Üniversitesi'nde geçiriyor ve Matematik Dünyasının yavru vatan temsilcisi. Yazı İşleri eski müdürümüz Vahdi Bingöl ve ODTÜ Basım İşliği'nin çalışanları ile Abdullah Can'a da teşekkür ederiz. Matematik Dünyası'nın gerçekleşmesi ve yaşaması için maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen Hitit Kitabevi sorumlusu Sayın Vahap Erdoğdu ve A & C Kitabevi sorumlusu Sayın Cemal Alpdoğan'a teşekkürü bir görev sayıyoruz. Matematik Dünyasına katkıda bulunan herkese ve özellikle ODTÜ Matematik Bölümü öğretim elemanlarına teşekkür etmek isteriz. Kanımızca, Matematik Dünyası, ODTÜ Matematik Bölümü öğretim elemanlarının katkıları olmadan gerçekleşemezdi. Yeni dönemde siz okurlarımızın daha fazla katkıda bulunacağını umuyor ve bekliyoruz. Matematik Dünyası'nın yazım işlerini gerçekleştiren Sayın Zehra Öner Tuğlu'ya ne kadar teşekkür etsek azdır. Yazı Kurulu'ndan ayrılan arkadaşlarımızın yerine ODTÜ'den Mahmut Kuzucuoğlu, Turgay Kaptanoğlu ve Bilkent'ten Mefharet Alpseymen Kocatepe görev yapacaklar. ODTÜ'den mezun olan Kuzucuoğlu, Manchester Üniversitesi'nde sonlu gruplar teorisinde doktora yaptı. Boğaziçi Üniversitesi mezunu olan Kaptanoğlu ise Wisconsin (Madison) Üniversitesi'nde çok değişkenli fonksiyonlar teorisinde doktora yaptı. Kocatepe ise Fen Lisesi ve ODTÜ Matematik Bölümü'nün ilk mezunlarındandır. Michigan (Ann Arbor) Üniversitesi'nde Nükleer Fréchet uzaylarının yapı teorisi üzerinde doktora yapan Kocatepe, Bilkent'ten önce ODTÜ'de çalışıyordu.

Beğeni ve ilgi ile izlenen problemler ve çözümler köşesini yürüten Cem Tezer'in görevini Albert Erkip, Ali Doğanaksoy ve Mefharet Kocatepe Alpseymen paylaşacaklar. Ancak Erkip, Şubat ayından itibaren Doğu Akdeniz Üniversitesi'nin konuğu olacağından bu zor görevi Doğanaksoy ve Kocatepe yürütecekler. Geçtiğimiz dönemde sorular ve çözümler köşesine katkıda bulunan okurlarımıza teşekkür ederiz. Yeni yayın döneminde de okurlarımızdan sorular beklediğimizi yinelerken, soruların mutlaka çözümleri ile beraber gönderilmesi gerektiğini hatırlatmak isteriz. Dergimizin ulaşmak istediği kitle, orta öğrenim ve üniversite öğrencileri olduğundan gönderilecek yazı ve/veya soruların bu kitlenin bilgileri ile çözülebilir olmasına dikkat edilmelidir. Amacımız, okul ve dershane müfredatında ele alınan konuları işleyerek matematiği tanıtmak ve sevdirmek. Bu bağlamda öğrenci kardeşlerimize soruları kendilerinin çözmeleri gereğini ve mümkün olduğunca öğretmenlerinden yardım istememelerini anımsatmak isteriz.

Türk Matematik Derneği'nin sahibi olduğu Matematik Dünyası kâr amacı gütmeyen bir dergidir. Artırılan ederi sadece artan giderlerin karşılanması için yapılan bir zorunluluktur. Geçtiğimiz dönemde bize yazan okurlarımıza ilgileri için teşekkür ederiz. Gecikmeli bile olsa, tümünü yanıtlayacağımıza veya yayınlayacağımıza söz veriyoruz. Dergimizin sizlere ulaşmasındaki gecikmeler tümü ile ile PTT'nin P'sinden kaynaklanmaktadır. Ancak dergimizin basım ve dağıtım işlerini yürüten A & C Kitabevi yöneticileri sizlere dağıtım ve abonelik konusunda karşılaşacağınız sorunlarda yardımcı olacaklardır. Aranması gerekli telefon numarası Ankara (312) 418 79 45. Derginin içeriği ile ilgili istek ve şikayetlerinizi de ODTÜ'nün (312) 210 12 82 numaralı telefonundan yazı kurulu üyelerine bildirebilirsiniz. Matematik Dünyası'nın daha geniş bir kitleye ulaşması için siz okurlarımızın katkılarını beklediğimizi bilmenizi isteriz.

Dergimizin İstanbul'da daha yaygın bir kitleye ulaşması için değerli katkı ve yardımları için okurumuz Sayın Alpaslan Ertuğ'a özellikle teşekkür ederiz.

ÖKLİD ALGORİTMASI

Cemal Koç *

1. Öklid Algoritması

Daha önceki bir yazımızda (bkz. Cilt 2, Sayı 1, s.17) tamsayılar ve polinomlar için bölme algoritmasını vermiştik. Bu yazımızda bölmenin yinelenmesi ile elde edilen Öklid algoritmasını vereceğiz. Öklid algoritmasının uygulaması olarak en büyük ortak bölenin varlığını ve asal çarpanlara ayırmanın tekliğini göreceğiz. Yazımız boyunca söyleyeceklerimiz hem tamsayılar hem de polinomlar için geçerli olacaktır. Bu ifadeler yerine göre sayılar, yerine göre polinomlar için kullanılacağından yazı içinde sık sık "sayısı (polinomu)" yazılımı yer alacaktır; bu ifadenin tam sayılar için yazıldığını ancak tamsayı sözcüğü yerine polinom sözcüğü konulduğunda da geçerli olduğunu belirtmektedir. $a, b, c, d, r_1, r_2, \ldots$ gibi harflerle hem tamsayılar hem de polinomları göstereceğiz. Şimdi Öklid Algoritmasını verelim:

a ve b iki tamsayı (polinomu) ve $b \neq 0$ olsun. a yı b ye bölmekle elde edilen kalan r_1 ve $r_1 \neq 0$ ise b yi r_1 e bölmekle elde edilen r_2 ve $r_2 \neq 0$ ise r_1 i r_2 ye bölmekle elde edilen kalan r_3 ve $r_3 \neq 0$ olsun. Böylece bir

$$a, b, r_1, r_2, \ldots \qquad (1)$$

dizisi elde edilir. Bu dizi sayılar dizisi ise salt değerce (polinomlar dizisi ise derece olarak) küçüleceğinden sıfıra ulaşmalıdır yani bir yerde kalanlardan biri kendinden sonrakine tam bölünmelidir.

$$\begin{aligned} a &= q_1 b + r_1 \\ b &= q_2 r_1 + r_2 \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-1} &= q_{n+1} r_n + r_{n+1} \\ r_n &= q_{n+2} r_{n+1} \end{aligned} \qquad (2)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada sıfırdan farklı son kalan olan r_{n+1} kalanının elde edilişi için yapılan bu ardışık bölme işlemleri topluluğuna *Öklid algoritması* denir.

Şimdi herkesin aklına gelecek soru "r_{n+1} in önemi ne?" olacaktır. Bir kez r_{n+1} kalanlar dizisinin bütün terimlerini dolayısıyla da a ile b yi böler. (Neden?) Yani r_{n+1}, a ile b nin ortak bölenidir. İkincisi, a ile b nin her ortak böleni r_{n+1}'i böler çünkü (2) eşitliklerine bakarsak

$$d|a, d|b \Rightarrow d|b, d|r_1 \Rightarrow d|r_1,\ d|r_2 \Rightarrow \\ \cdots \Rightarrow d|r_{n-1}, d|r_n \Rightarrow d|r_{n+1}$$

olduğunu görürüz. Demek ki r_{n+1}, a ile b nin öyle bir ortak böleni ki her ortak bölen ile bölünebiliyor. Böyle ortak bölenlere ***en büyük ortak bölen*** denir.

2. OBEB, OKEK

Biçimsel bir tanım verecek olursak,

Tanım: a, b, c üç tamsayı (polinom) olsun. Eğer

(1) $c \mid a,\ c \mid b$ ve

(2) $d \mid a,\ d \mid b \Rightarrow d \mid c$ ise

c'ye a ile b'nin ***en büyük ortak böleni*** denir.

Benzer biçimde

(1′) $a \mid c,\ b \mid c$ ve

(2′) $a \mid d,\ b \mid d \Rightarrow c \mid d$ ise

c'ye a ile b'nin ***en küçük ortak katı*** denir.

Öklid algoritması bize a ile b nin r_{n+1} gibi bir en büyük ortak böleninin varlığını gösteriyor. Peki, bu en büyük ortak bölen en azından bir anlamda tek mi? c_1 ve c_2, a ile b nin en büyük ortak bölenleri ise c_1 bölen, c_2 en büyük ortak bölen alınarak $c_1|c_2$, c_2 bölen, c_1 en büyük ortak bölen alınarak $c_2|c_1$ olduğu görülür yani $c_2 = c_1 c_1'$, $c_1 = c_2 c_2'$ ve dolayısıyla $c_2 = (c_2 c_2')c_1'$ çıkar. Demek ki $c_2' c_1' = 1$ olur, yani tamsayılarda $c_2 = \mp c_1$, polinomlarda $c_2 = c_1$ (sıfırdan farklı bir sabit) olmaktadır. a ve b gibi iki tamsayının pozitif en büyük ortak bölenine (iki polinomun yalın

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

(başkatsayısı 1 olan) en büyük ortak bölenine) *ortak bölenlerin en büyüğü* (OBEB) denir ve (a,b) ile gösterilir. Görüldüğü gibi yukardaki adlandırmada her ne kadar "en büyük" nitelemesi varsa da tanımın büyüklük sıralaması ile ilgisi yoktur. Yaptığımız tartışmadan *OBEB'in varlığını ve tekliğini* söyleyebiliyoruz.

Yukarıdaki (2) eşitliklerinde herbir kalanı kendinden önce gelen türünden yazar arka arkaya yerine koymalar yaparsak,

$$\left.\begin{array}{rcl} r_{n+1} &=& r_{n-1} - q_{n+1}r_n \\ r_n &=& r_{n-2} + q_n r_{n-1} \\ r_{n-1} &=& r_{n-3} + q_{n-1}r_{n-2} \\ &\vdots& \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rcl} r_{n+1} &=& r_{n-1} + q_{n+1}r_n \\ &=& r_{n-1} + q_{n+1}(r_{n-2} + q_n r_{n-1}) \\ &=& \cdots \end{array}$$

Sonuçta da

$$r_{n+1} = a_1 a + b_1 a$$

olacak biçimde a_1 ve b_1 öğeleri buluruz. Gerekirse r_{n+1}'i tersinir bir öğe ile çarparak hem OBEB'in varlığını hem de

$$(a,b) = a^*a + b^*b \qquad (3)$$

yazılabileceğini görmüş oluyoruz.

Örnekler. 1) 67367 ile 51813 sayılarının OBEBini ve

$$(67367, 51813) = a^*67367 + b^*51813$$

eşitliğini sağlayan iki a^*, b^* sayısı bulunuz. Kolaylık olsun diye işlemleri şu çizelge yardımıyla yapalım:

Bölüm		1	3	3	51
B-B *	67367	51813	15554	5151	101
	51813	46662	15453	5151	
Kalan	15554	5151	101	0	

* Bölünen-Bölen

Böylece son sıfırdan farklı kalan olarak 101 buluruz. Demek ki OBEB 101 dir. Ayrıca

$$\begin{array}{rcl} 101 &=& 15554 - 3\cdot 5151 \\ 5151 &=& 51813 - 3\cdot 15554 \\ 15554 &=& 67367 - 51813 \end{array}$$

eşitliklerinden

$$\begin{array}{rcl} 101 &=& 15554 - 3(51813 - 3\cdot 15554) \\ &=& 10\cdot 15554 - 3\cdot 51813 \\ &=& 10\cdot(67367 - 51813) - 3\cdot 51813 \\ &=& 10\cdot 67367 - 13\cdot 51813 \end{array}$$

bulunur. Demek ki $a^* = 10$, $b^* = -13$ alınabilir.

2) $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ ve $-x^3 - 2x^2 + x + 2$ polinomlarının ortak bölenlerinin en büyüğünü bulup bunu

$$a^*(2x^3 + 3x^2 - 3x - 2) + b^*(-x^3 - 2x^2 + x + 2)$$

biçiminde yazınız.

	-2	$x+1$
$2x^3+3x^2-3x-2$	$-x^3-2x^2+x+2$	$-x^2-x+2$
$2x^3+4x^2-2x-4$	$-x^3-2x^2+x+2$	
$-x^2-x+2$	0	

Demek ki son kalan $-x^2 - x + 2$'dir. Yalınlaştırmak için bunu -1 ile çarparsak $OBEB = x^2 + x - 2$ elde ederiz. Ayrıca

$$\begin{array}{rcl} -x^2 - x + 2 &=& 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 \\ && +(-2)(-x^3 - 2x^2 + x + 2) \end{array}$$

den $a^* = 1$ ve $b^* = -2$ alınabileceği görülür.

Alıştırma. Herhangi üç a, b, c tamsayısı (polinomu) verildiğinde $b \neq 0$ ise $((a,b),c) = (a,(b,c))$ olacağını ve bu ortak değerin a, b, c nin bir ortak böleni olduğunu ve a, b, c nin her ortak bölenininin katı olduğunu gösteriniz. (Bundan dolayı bu öğeye a, b, c nin OBEBi denir ve (a,b,c) ile gösterilir. Aynı sonuç daha fazla sayıdaki tamsayı ya da polinom için yinelenebilir.)

Yukarıda elde ettiğimiz (3) bağıntısı sayılar kuramının en temel bağıntılarından biridir. Özellikle bu bağıntıya dayanan ve şimdi kanıtlayacağımız şu önerme her yerde kullanılmaktadır:

a ile b sayılarının (polinomlarının) aralarında asal olması için gerek ve yeter koşul

$$aa^* + bb^* = 1 \qquad (4)$$

olacak biçimde a^* ve b^* sayılarının (polinomlarının) bulunmasıdır.

a ile b aralarında asal demek $(a,b) = 1$ demek olduğu için önermenin bir yönü (3) bağıntısının doğrudan sonucudur. Öbür yönünü görmek için ise $a^*a + b^*b = 1$ olduğunu varsayalım. Eğer a ile b nin bir c ortak böleni bulunsaydı

$$c|a, \quad c|b \Rightarrow c|1$$

olurdu ve dolayısıyla $c = \mp 1$ çıkardı. Bu ise $(a,b) = 1$ yani a ile b aralarında asal demektir.

Örnek 1. Ardışık sayılar aralarında asaldır:

$$(n+1)-n=1.$$

Örnek 2. $x^5+3x^4-x^2+x+1$ ve x^5+3x^4-1 polinomlarının OBEB'i nedir?

Bunu bulmak için

$$x^5+3x^4-1-(x^5+3x^4-x^2+x+1)=x^2-x-2$$

eşitliğinden yararlanalım. Bu iki polinomun her ortak böleni x^2-x-2 nin de bölenidir. Yani yalın ortak bölen adayları

$$x,\ x+1,\ x-2,\ x^2-x-2$$

dir. $x=-1$ ve $x=2$ için x^5+3x^4-1 in değeri 0 olmadığından $x+1$ ile $x-2$ ortak bölen olamaz öyleyse verilen polinomlar aralarında asaldır.

Örnek 3. Eğer $P(x)$ ve $Q(x)$ aralarında asal polinomlarsa, x in her m tamdeğeri için $P(m)$ ve $Q(m)$ sayıları aralarında asaldır. Çünkü, $P(x)$ ile $Q(x)$ aralarında asal olduğundan

$$P^*(x)P(x)+Q^*(x)Q(x)=1$$

olacak biçimde $P^*(x)$ ve $Q^*(x)$ polinomları bulunabilir oysa bu bize

$$P^*(m)P(m)+Q^*(m)Q(m)=1$$

eşitliğini verir bu ise $P(m)$ ile $Q(m)$ nin aralarında asal olduğunu gösterir.

Alıştırma. (UMO 1959) Hiçbir n doğal sayısı için $\frac{21n+4}{14n+3}$ kesrinin kısaltılamayacağını gösteriniz.

3. Asal Çarpanlara Ayırma

Şimdi de (4) bağıntısından yararlanarak her sayı ve polinomun esas itibariyle tek türlü olarak asalların çarpımıyla oluşturulabileceğini görelim. Anımsayacak olursak (bkz. Matematik Dünyası, Cilt 3, Sayı 3, s.1) asal sayılar tam iki tane pozitif tam böleni bulunan pozitif sayılar ve asal polinomlarsa tam iki tane yalın (monik) böleni bulunan yalın polinomlardı.

Şimdi göstermek istediğimiz ve ilkokul sıralarında bile kullandığımız sonucu ifade edelim:

Her a pozitif tamsayısı (yalın polinomu)

$$a=p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_m^{s_m}$$

biçiminde tek türlü olarak asal çarpanlara ayrılabilir. Bu çarpanlamanın varlığını görmek için asal çarpanlara ayrılamayan sayılarını (polinomların) varlığını düşünelim. Bunların en küçüğü (en küçük derecelilerinden biri) k olsun. $k=1$ ya da $k=p$ (asal) olamaz (neden?), öyleyse k nın gerçek bölenleri vardır: $k=qr$; $1<q<k$, $1<r<k$ $(0<der(q)<der(k)$ $0<der(r)<der(k))$ k nın seçiliş biçimi nedeniyle bundan küçük olan q ve r asal çarpanlara ayrılabilir:

$$q=p_1^{e_1}\cdots p_m^{e_m},\quad r=p_1^{f_1}\cdots p_m^{f_m}$$

bu ise

$$k=qr=p_1^{e_1+f_1}\cdots p_m^{e_m+f_m}$$

olması demektir. Sonuç k nın seçilişi ile çeliştiği için seçilen biçimde bir k sayısı dolayısıyla da asal çarpanlara ayrılamayan pozitif tamsayı bulunamaz.

Çarpanlamanın tekliğine gelince, p_i ve q_j ler asal olmak üzere

$$a=p_1^{e_1}\cdots p_m^{e_m}=q_1^{f_1}\cdots q_t^{f_t};$$

eşitliğinden $m=t, p_1=q_1,\ldots,p_m=q_m$ sonucuna ulaşmamız gerekiyor. Bunun için ise yukarda belirttiğimiz (4) bağıntısına gerek duyuyoruz. Şöyle ki, p asal $p|rs, p\nmid r$ ise $(p,r)=1$ demektir ve dolayısıyla

$$1=p^*p+r^*r\Rightarrow s=p^*ps+r^*rs\Rightarrow p|s$$

çıkar. Demekki bir asal bir çarpımı bölerse çarpanlardan en az birini böler, bu ise $p_1^{e_1}\cdots p_m^{e_m}=q_1^{t_1}\cdots q_t^{f_t}$ eşitliğinden arka arkaya uygulamalarla p_i lerle q_i lerin sıralama dışında aynı olacakları sonucunu verecektir. Ayrıntıları düşünmeyi okura bırakıyoruz.

Asal çarpanlara ayrılma özelliği tam sayıların ana özelliğidir. Bu özellik bilindikten sonra ele alınamayacak problem yoktur denilebilir. Asal çarpanlara ayırmanın yararlarından biri bölenleri belirlemektir. Gerçekten

$$a=p_1^{s_1}\cdots p_m^{s_m}$$

nin pozitif (yalın) bölenlerinin

$$a=p_1^{t_1}\cdots p_m^{t_m}\quad (0\le t_1\le s_1,\ldots,0\le t_m\le s_m)$$

biçiminde belirlenebileceğini ve bu bölenlerin $(s_1+1)\cdots(s_m+1)$ tane olduğunu hemen söyleyebiliriz. Bundan yararlanılarak

$$a=p_1^{s_1}\cdots p_m^{s_m},\ b=p_1^{t_1}\cdots p_m^{t_m},\ (0\le s_i,\ 0\le t_i)$$

ile belirli a ve b için en büyük ortak bölen ve en küçük ortak katı sırasıyla

$$\begin{aligned}(a,b) &= p_1^{k_1}\cdots p_m^{k_m};\ k_i = kuc(s_i,t_i)\\ [a,b] &= p_1^{b_1}\cdots p_m^{b_m};\ b_i = buy(s_i,t_i)\end{aligned}$$

biçiminde belirtebiliriz. Böylece en küçük ortak katın varlığını da görmüş oluyoruz. Buradan hemen

$$ab = [a,b](a,b)$$

eşitliğini de yazabiliriz.

Bir alıştırma ve bir problem çözümü ile yazımıza son veriyoruz. Alıştırmada verilen dost sayı çiftleri MS826 ve 301 yılları arasında yaşamış bulunan Harranlı Tabit Bin Kurra tarafından elde edilmiş. Çok sonraları Fermat ve Descartes tarafından yeniden bulunmuş ve 1747'de de Euler tarafından incelenmişlerdir.

Alıştırma. m ve n gibi iki doğal sayıdan birinin öz bölenleri toplamı diğer sayıya eşit oluyorsa bu sayı çiftine *dost sayılar* denir.

1) 284 ve 220 sayılarının dost sayılar olduğunu gösteriniz.

2) $p = 3\cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3\cdot 2^n - 1$ ve $r = 9\cdot 2^{n-1} - 1$ asal sayılarsa $M = 2^n pq$ ve $N = 2^n r$ sayılarının dost sayılar olacağını gösteriniz. $n \le 4$ için buradan elde edilebilecek dost sayıları belirtiniz.

Problem. (1991 Amerikan Matematik Olimpiyadı) Bir ABC üçgeninde A açısı B açısının iki katı, C açısı geniş açı ve a,b,c kenar uzunlukları tamsayılardır. Mümkün olan en küçük çevreyi belirleyip kanıtını yapınız.

Çözüm. Çevresi en küçük olan ABC üçgenini gözönüne alalım. A daki iç açıortayın BC yi kestiği nokta N olsun. Açıortay bağıntısından

$$\frac{|NB|}{C} = \frac{|NC|}{b} = \frac{|NB|+|NC|}{b+c} = \frac{a}{b+c}$$

elde edileceği için $|NC| = \frac{ab}{b+c}$ çıkar.

Oysa ANC ve BAC üçgenleri benzer olacağından

$$\frac{|NC|}{b} = \frac{b}{a} \text{ yanı } \frac{a}{b+c} = \frac{b}{a}$$

Sonuçta da $a^2 = b(b+c)$ elde edilir. Burada b ile $b+c$ aralarında asal olmalıdır. Değilse b ile c nin 1 den farklı bir d ortak böleni bulunurdu, bu ortak bölen a yı da bölerdi. Kenarları $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}$ olan üçgense hem ABC ye benzer hem de daha küçük çevreli olurdu. Bu ise ABC nin seçilişine uymaz. Böylece aralarında asal b ve $b+c$ sayılarının tam kare olduklarını çıkarıyoruz:

$$b = m^2,\ b+c = n^2,\ a = mn;\ (m,n \in \mathbb{Z}^+)$$

ABC'nin üçgen olma koşulu $c < a+b$ eşitsizliğini; $\hat{C}$ açısının geniş açı olması koşulu da $c^2 > a^2 + b^2$ eşitsizliğini veriyor. Bu eşitsizlikleri m ve n türünden yazdığımızda

$$\sqrt{3} < \frac{n}{m} < 2$$

elde ediyoruz. Bu eşitsizlikler $m = 1, 2$ ya da 3 olduğunda hiçbir n için sağlanmazlar. Buna göre $m \ge 4$ ve $n^2 \ge 3m^2 \ge 48$ yani $n \ge 7$ olmalıdır; dolayısıyla da

$$a+b+c = mn + n^2 \ge 4.7 + 7^2 = 77$$

olmalıdır. Oysa $m = 4, n = 7$ alınarak elde edilen $a = 28, b = 16, c = 33$ kenar uzunluklarına sahip üçgen çevresi 77 olan ve problemin koşullarını sağlayan bir üçgendir. Öyleyse bu üçgen istenen üçgendir.

KAYNAKÇA

[1] B.L. van der Waerden: *A History of Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

KATASTROF VE KAOS TEORİLERİ HAKKINDA

Alp Eden *

Kaos Teorisi Düzene Karşı mı?

1980'li yıllar gerek matematik biliminde gerekse matematiği yoğun olarak kullanan fizik, kimya ve biyoloji gibi bilim dallarında büyük bir patlamaya sahne oldu. Bir yandan doğanın yeni geometrisi olduğu iddiasıile fraktal geometri diğer yandan da Newton'un paradigmasını yıktığını iddia eden yeni bir mekanik anlayışı ile kaos teorisi elele verip yeni bir bilimin doğuşunu müjdelediler.[1] Bilgisayarlarının yardımı ile yüzlerce bilim kadını/adamı ekranlarının başında hayranlıkla bazı karmaşaları gözlemlediler. Bu karmaşıklıklar değişik adlarla biliniyor günümüzde, ama onları görenlerin genellikle çıkarımları aynı: "tamam, bu sistem kaotik". Düzene merakları ile bilinen matematikçilerin bu arap saçına benzer şekillerden böylesine keyif almalarını anlamak benim gibi bir matematikçi için güç! Yine de bu yazıda, son kertede insani bir uğraş alanı olan matematik biliminin ve matematikçilerin kaos teorisine nasıl sarıldıklarını, biraz ümitlerini, biraz hayal kırıklıklarını ve sonunda artık doyum noktasına ulaşmakta olan bu teorinin kısa bir tarihini anlatmak istiyorum, çünkü tarihini yazmanın zamanı geliyor artık. Kaos teorisi ile ilgili genel bir tanıtım yazısı umanları hemen uyarayım, okuyacakları ne bir tanıtım ne de bir savunu yazısı, olsa olsa matematik dünyasında artık kabul görmüş bu bilgi edinim alanının kısıtlı bir anatomisi. Kaos teorisinin yakın tarihçesi ile 1970'li yıllarda parlak fakat kısa süreli bir yaşamı olan Katastrof teorisinin tarihçesi arasında şaşırtıcı benzerlikler var. Bir yandan bu benzerlikleri ortaya koymaya çalışırken diğer yandan da bazı farklarına değineceğim. Kaós ve Katastrof'un dışında yazının üçüncü gizli kahramanı da bilgisayarlar.

Kaos Nedir?

Gündelik kullanımdaki kaos ile günümüzde matematikçi ve fizikçilerin bu kelimeye yükledikleri anlam arasında önemli bir fark var. Bazı kozmoloji teorilerinde evrenin başlangıcı sayılan düzensizliğe kaos adı verilmiş, sözlüklerde ilk anlamı da bu kaos'un. Düzen işte bu ilk düzensizliğin, karmaşanın içinden ortaya çıkıyor. Termodinamiğin ikinci yasası da aynı tür bir düzensizlikten söz ediyor. Rudolf Clausius'un 1854'te ortaya attığı ikinci yasaya göre tüm doğal süreçler entropi üretir. Entropi düzensizliğin ve karmaşanın bir ölçüsüdür.[2] Boltzmann'ın 1873'te öne sürdüğü istatistiksel yorum bile termodinamiğin ikinci yasasının geniş kabulünü sağlamadı. Her ne kadar 20. yüzyılda istatistiksel mekanikte büyük ilerlemeler olmuşsa da, gerek 1960'larda Ilya Prigogine'nin denge durumu dışındaki sistemlerin istatistiksel mekaniği üzerine çalışmaları, gerekse David Ruelle'in 1970'li yıllarda termodinamiğin matematiksel teorisine yaptığı katkılar bu önemli teorinin henüz tam bir berraklığa kavuşmadığını gösteriyor.[3]

Kaos kelimesinin uzayda düzensizlik anlamı uzaydaki parçacıkların keyfi bir biçimde dağılmasını açıklamaya yönelik. Bu anlamda, düzen parçacıkların bir yerde öbekleşmiş olmasına deniyor. Dinamik sistemler teorisi ise parçacıkların tümüne bakmak yerine birkaç parçacığın zaman içinde dolanımını incelemeye çalışıyor. Amaçlardan biri de uzun zaman sonra parçacıkların yerleşeceği denge konumunun tespiti. 20. yüzyılın başında Fransız matematikçisi Henri Poincaré üç cisim problem-

* Boğaziçi Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi

[1] James Gleick'in popüler kitabının adı *Chaos; Making a New Science*. 1991'de yayınlanan *Chance and Chaos* adlı kitabında David Ruelle, Kaos'u sadece yeni bir paradigma olarak niteliyor.

[2] David Layzer, *Cosmogenesis: The Growth of Order in the Universe* adlı kitabında düzen ve keyfilik (randomness anlamında) hakkında ilginç gözlemlerde bulunuyor. Özellikle 40. sayfada açıkladığı oyuncak evren'in 0 ve 1'lerden oluşan çift-taraflı sonsuz bir dizi olması matematikçileri heyecanlandırabilir.

[3] Ilya Prigogine, *Non-equilibrium Statistical Mechanics* (1962), David Ruelle, *Thermodynamic Formalism*, (1978). Prigogine'nin ilginç fikirlerini popüler kitaplarda da bulmak mümkün, örneğin *From Being to Becoming: Time and Complexity in the Physical Sciences* (1980). Ruelle'in istatistiksel mekaniğe yaklaşımı biraz farklı, bu farkı *Chance and Chaos* adlı kitabının 18-20 bölümlerinde açıklıyor.

inin çözümlerini incelemeye koyuluyor. Newton mekaniğine uygun olarak hareket eden üç cisim düşünelim, bu üç cismin belirli bir zaman sonunda hangi konumda bulunacağını soran probleme üç cisim problemi deniyor. Problemin matematiksel yönü, doğrusal olmayan bir adi diferansiyel denklem sisteminin çözümünü içeriyor. Analitik bir çözüm elde etmenin güçlüğünün yanı sıra Poincaré'nin denediği asimtotik analiz de, iyi sonuçlar vermemiş. Poincaré'nin gözlemi analizinin ilk koşullarının (ilk değer problemini belirlemek için) değerlerine hassas bir biçimde bağlı olması.[4] Bir başka deyişle böylesi sistemlerde ilk koşullardaki ufak bir sapma, sistemin uzun zaman içindeki davranış biçimini büyük ölçüde etkiliyor. David Ruelle bu özelliğe, kaos'un fonksiyonel tanımı diyor. Eğer bir sistemin ilk koşullarındaki ufak bir değişim uzun zaman sonrası koşullarda üstel bir ayrıma yol açıyorsa o sistem kaotiktir. Görüldüğü gibi kaos'un bu ikinci anlamı daha çok sistemin zaman içinde davranışının önceden tahmin edilememesi ile ilgili, yani uzay içinde düzensizlik yerini zaman içinde düzensizliğe bırakmış. Kolay ifade edilebilir olması dışında bu tanım matematikçileri tatmin etmekten çok uzak, yerine önerilen daha matematiksel tanımlar ise geniş bir kabul görmedi henüz.[5] Kaos'un resmi ve genel kabul görmüş bir tanımının olmamasının temel bir nedeni kaotik olduğu kabul edilen Lorenz sistemi ve Henon sistemi gibi dinamik sistemlerin matematiksel tanımlara uyduklarının ispat edilememesi. Uzun süren bir çaba sonunda, zor soruları çözmesi ile ünlü İsveçli matematikçi Lars Carleson, Henon sisteminin çoğu koşul altında kaotik olduğunu ispat etti.[6] Eminim bu haber birçok matematikçi için ferahlatıcı olduğu kadar, diğerleri için de ürkütücü. Ekranlarının başında saatte üç teorem "ispatlayan" matematikçiler için yoksa rahatlık dönemi bitti mi? Daha açık sormak gerekirse, Carleson'un ispatıyla birlikte kaos teorisinde geçerli matematiksel açıklamalar sadece matematiksel ispatlara mı indirgendi? Tam değil.

Bilgisayarlar ve Matematiksel İspat

Bilgisayarların matematiksel ispatlarda kullanılması çok yeni değil. Örneğin, 1977 yılında M. Appel, W. Haken ve J. Koch dört-renk problemini bilgisayar yardımı ile çözmüşler ve verilen herhangi coğrafi bir haritadaki ülkeleri dört ayrı renge boyayarak komşu ülkelerin değişik renklere sahip olabileceğini ispat etmişler.[7] Hem tüm olası haritaların dökümünde, hem de değişik durumların boyanmasında bilgisayara başvurulması, tüm ispatların temel prensiplerden (aksiyomlardan) tümevarımla yapıldığına inanan matematikçileri özellikle rahatsız etti. Her ne kadar matematiksel ispata çok yönlü bakan felsefeciler olsa da, onlar azınlıkta kalıyor.[8] Yine de son yıllarda matematik dünyasında gözle görülür bir tolerans belirmiş durumda bilgisayarların kullanımına karşı. "İspatlı" neticeler yayınlaması ile ünlü Amerikan matematikçiler derneğinin yayın organı Bulletin'in, Ocak 1992 sayısında, editörler özrü andırır bir giriş yazısında şöyle diyorlar:[9]

"Onbeş yıl önce, Katastrof teorisinin olağanüstü uygulanımları ile ilgili ateşli bir tartışma vardı, günümüzde ise benzer bir tartışma, bazılarının fazlasıyla satışa ve popülerliğe yönelik gördükleri "fraktaller" ve "kaos" üzerine var. Başka canlı bir tartışma konusu da matematik ile teorik fizik arasında yükselip alçalan aşk hikayesinin yeniden gündeme gelmesi ile ortaya çıktı. Matematiğin, fizik-

[4] Böyle bir gözlem 1898 yılında Fransız matematikçi Jacques Hadamard tarafından başka bir denklem sistemi için yapılmış. Konunun kısa tarihçesini Ruelle'in son kitabında bulmak mümkün.

[5] R. Devaney, artık üniversite giriş düzeyinde okutulan kitabında, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (1986) ciddi bir matematiksel tanım veriyor ancak bu tanımın fazla katı olduğunu düşünen matematikçiler var. Bir sistemin kaotikliğini ispat etmek için genellikle en uygun tanım seçiliyor, tüm tanımlar birbirine eşdeğer olmadığı durumlarda da. Yazımda kaos'un açıklayıcı yönüyle ilgileniyorum, yoksa kaçınılması gereken bir durum olarak değil. Dolayısı ile, özellikle mekanik problemlerde, değişik parametre koşullarında sistemin kaotik olmasını engelleme problemleri ilginç olsa da kanun dışı, Lars Carleson'un 1966'da yayınlanan ve $log(log.\ n)$-neticesi olarak bilinen makalesi, Fourier serilerinin noktasal yakınsaması ile ilgiliydi. Daha henüz yayımlanmamış olan son neticesi ise başka bir matematikçi ile ortak çalışma ve 70-80 sayfa olduğu söyleniyor. Henon sisteminin parametreleri üzerinde tanımlanmış bir ölçüm (measure) "çoğu koşul altında" ifadesinin matematiksel içeriğini ortaya koyuyor.

[6] Bkz. Dipnot 5.

[7] Bak Illinois Journal of Mathematics (1977) 429-90 ve 490-567, ülkelerin bağlantılı olması ve sınırlarının sağladığı özellikler ayrıca açıklama gerektiriyor.

[8] Imre Lakatos'un, *Proofs and Refutations* adlı kitabında varmaya çalıştığı modelde belitler (axioms) önceden varsayılmaz ve incelenen konunun bağlamında ispat ile birlikte oluşurulur.

[9] AMS Bulletin, Ocak 1992, Morris W. Hirsch, Richard S. Palais, "Editors' Remarks" 1-2. Editörlerin giriş yazısı, Bulletin'da yayımlanan iki yazı ile ilgili. Nümerik analiz ile kompleksite teorisini birleştirip en az masrafla nümerik problemlerin yaklaşık çözümlerini bilgisayar yardımı ile çözmeyi amaçlayan IBCT (bilgi bazlı kompleksite teorisi) ile ilgili iki yazı da.

sel dünya ile ilgili yeni sezgiler elde etmek için bir alet olarak kullanıldığı durumlarda değişik matematiksel ispat standartları kullanmayı öğrendik. Fakat formal olmayan ya da yarı-formal olan fiziksel metotlar ile bizim matematiksel dünyamızla ilgili yeni sezgiler öneren makaleleri değerlendirirken nasıl standartlar uygulamalıyız, özellikle o sezgiler bugünkü temelli (rigorous) matematiğin elinin uzanamayacağı bir yerde ise? Özellikle, böylesi sorular sadece mantıksal prensiplerle cevaplandırılamayacağı için, inanıyoruz ki matematikçiler için onlarla yüzleşmek önemlidir. Rasyonel tartışmanın farklılıkları tümüyle ortadan kaldırmadığı durumlarda bile sorunlara açıklık getirebilir".

Gerek giriş yazısının dramatikliği, gerekse de senelerdir okuduğum Bulletin'da böyle bir giriş yazısına ilk defa rastlıyor olmam, yazının önemini yeterli derecede açıklamıyor. 1992 yılının başında yayınlanan bu yazı, belki de yeni bir çağın başlangıcını haberliyor matematikçiler için. Nasıl bir çağ mı? Bilgisayar çağı. Ekim 1992 sayısında Bulletin yeni bir 'ilk' ile karşımıza çıkıyor: bu kez bilgisayarın kısıtlı ve sınırlı olarak kullanıldığı bir ispat ile. S.P. Hastings ve W.C. Troy Lorenz sisteminin kaotik olduğuna ilişkin ilk yarı-resmi neticeyi ilan ediyor. Kendi ispatlarının matematiksel resmiliği konusunda kaygılarını şöyle dile getiriyorlar:[10]

"...Ayrıca, kaotik bir yörünge olup olmadığı sorusunu, prensipte, açık bir parametre değerleri kümesi için kapalı aralık aritmetiği gibi temelli nümerik analiz teknikleri ile incelenebilecek bir soruya indirgedik. Başka bir deyişle, ikinci teoremimizin varsayımlarının temelli gerçeklenmesi için gerekli hesaplama süresi sonlu, böyle bir koşulun pratik olup olmadığı ise şu anda cevaplandırılmamış bir soru olarak kalıyor. Bilgisayar yardımı ile yapılan ispatlar genellikle anlayışımızda bir boşluk bırakırlar, ama birinci ve ikinci teoremlerimizle bu boşluğun eskiye nazaran daha ufaldığına inanıyoruz".

Sanırım, Troy ve Hastings'in "ekran matematikçileri"nden farkları, bilgisayardan beklediklerini gayet somut bir biçimde varsayımlar halinde ifade etmeleri ve bu varsayımların doğruluğu dışında ispatlarında kullanmamaları.[11] Varsayımlarının tümüyle matematiksel bir ispatı henüz yapılmamış olmasına rağmen, imkansız da değil böylesi bir ispat. Bilgisayarların ispat yapıp yapamayacağı, hem beni hem de böylesi bir giriş yazısını aşıyor. Roger Penrose'un benzeri bir sorunsal üzerine 600 sayfalık bir kitap yazdığı gözönüne alınırsa, benim özrüm de daha kabul edilebilir boyutlara iner.[12]

Katastrof Teorisi ve Kaos Teorisi

1970'li yılların sonu bir teorinin kayboluşuna ve yeni bir teorinin doğuşunu müjdeliyordu. Kaybolan teorinin adı Katastrof teorisi. 1972 yılında Rene Thom sonradan cep kitabı alma şerefine erişmiş o nadir matematik kitaplarından biriyle teorinin ana hatlarını ortaya koydu.[13] Enerji kaybeden mekanik sistemlerde, sistem parametrelerinde yapılan ufak bir değişim, sistemin genel davranışını dramatik bir biçimde değiştirebiliyor. Böylesi ani değişimlerin kataloglanmasını ve tüm olası biçimlerinin listesini katastrof teorisi bize sunuyor, ya da öyle bir iddiası var.[14] Daha sonra birçok matematikçi tarafından da benimsenen teori Newton'dan sonra matematikte yaşanan ilk devrim diye lanse edilmeye başlandı. Süreklilik kavramını, sıçramalar ve nitelik değişimlerinin de anlatılabileceği biçimde genişleten bu teori kalbin atışına, optik teorisine, dilbilimine, psikolojiye, ekonomiye, hidrodinamiğe, jeolojiye, elementer parçacık teorisine, beynin çalışma biçiminden hapisanelerdeki isyanların modellenmesine kadar

[10] AMS Bulletin, Ekim 1992. "A Shooting Approach to the Lorenz Equation", s.298-303.

[11] Bilgisayarlar özellikle dallanma teorisi gibi analitik çözümlerin çok zor olduğu konularda temel bir rol oynuyorlar. Dallanma noktalarının (bifurcation points) yaklaşık konumları bilgisayarlar yardımı ile elde ediliyor. Dallanma teorisinin kaos teorisi için önemi göz önüne alınırsa bilgisayarların kısıtlı kullanımının kaçınılmazlığı iyice ortaya çıkıyor. Benim ekran matematikçileri diye biraz da alaya aldığım, matematiksel analizden kaçınarak ekranlarının arkasına gizlenen işte bu insanlar. Yoksa, Troy ve Hastings'in makalesinin Bulletin'da yayımlanması da bilgisayarla elde edilelcek bilgilerin kaçınılmazlığının bir idraki matematik dünyası içinde.

[12] İngiliz fizikçi Roger Penrose, popüler kitabına (*The Emperor's New Mind*) bir soru ile başlıyor: "bilgisayarın zihni olabilir mi?" ve bilincin sadece bir hesaplamayla ortaya çıkamayacağını iddia ediyor. Burada, ama bilgisayarlar ispat yapıyorlar diye düşünenleri ispat edilenlerin "yeni" neticeler olmadığını hatırlatayım.

[13] René Thom, *Stabilite Structurelle et Morphogenese*, (1972).

[14] Katastrof teorisinin değişik bilimlere ani bir etkisi oldu. Ivar Ekeland'ın ödül kazanmış popüler kitabında (*Mathematics and the Unexpected*, Univ. of Chicago Press, 1988) geometrinin matematiğe geri dönüşüne bir başlangıç teşkil ettiğini söylüyor. Aynı kitapta hem katastrof teorisinin bir eleştirisi ve savunusunu da bulmak mümkün. Katastrof teorisinin ne yapamadığı konusunda oldukça net açıklamalar yapmış, yine de Kepler ile Thom'u kıyaslaması ona verdiği önemi gösteriyor.

her türlü teoriye uygundu. Birkaç sene içinde, ön çalışmalar olarak sunulan modellerin arkası gelmeyince, içerdiği matematik tekillik teorisinin içinde eritilerek asıl ismi anılmaz oldu. Tekillik teorisinin önemli isimlerinden V.I. Arnold yine bir cep kitapcığında ilginç bir biçimde katastrof teorisini özetler.[15] 1980'lere gelindiğinde artık Katastrof teorisi adı altında yayınlanan bazı kitaplar bir de savunu bölümü içeriyordu, uygulamalarının ilk başlarda savunulduğu kadar güçlü olmadığını anlayan teoriciler "uygulama" kavramına açıklık getirmeye çalışıyorlar, bilimsel çalışmaların niteliği ile ilgili yorumlarda bulunuyorlardı, işte P.T. Saunders'ten bir pasaj:[16]

> "Bilimde bilginin ve açıklamanın niteliği hakkında kapsamlı bir tartışma açıkça bu kitabın sınırları dışında, fakat unutmamalıyız ki bu konuda temel açıklığa kavuşmamış, belki de kavuşamayacak, problemler var. Bu problemlerden katastrof teorisi içinde çalışan bizler daha farkında olabiliriz çünkü teori o kadar yeni ki henüz teoriyi iyi kullanabilmek için tekniklerimizi geliştirme aşamasındayız, fakat aynı zorlukları her bilimde görmek mümkün eğer yeteri derecede yakından bakarsak; hatta Lakatos'un (1976) düşündürücü kitabında, "İspatlar ve Çürütmeler" ileri sürdüğü gibi matematikte bile. Katastrof teorisini hiçbir teorinin gerçekleştiremeyeceklerini gerçekleştirmediği için eleştirmek insafsızlık".

Yukarıdaki alıntıda iki ilginç nokta var, birincisi katastrof teorisini matematiksel bir teori olarak görmemek, ikincisi de Lakatos'un tezini biraz keyfi olarak yorumlamak.[17] 1984 yılında, İngilizcesi yayınlanan cep kitapcığında Arnold Katastrof teorisinin muammasını şöyle aralamaya çalışıyor:[18]

> "Tekillik teorisinin güzel neticeleri katastrof teorisinin muammasına dayanmıyor, şansımıza. Fakat, tekillik teorisinde, bütün matematikte de olduğu gibi, anlaşılmamış gizemler var: matematiksel nesneler ve teoriler, ilk bakışta birbirlerinden bağımsız gözükseler de, sonunda birbirleri ile sıkıca ilişkili çıkıyorlar".

Gerek Saunders gerekse Arnold ilginç neticeler üretmiş bu teoriyi tümüyle terketmek istemiyorlar. Oysa ki 1980'li yılların başında, Katastrof teorisinin iddialılığını, parlak söylem biçimini ödünç alan başka bir teori kapıda bekliyordu: Kaos teorisi.[19] Bulletin'dan yaptığım ilk alıntıda Kaos teorisi ile Katastrof teorisi arasındaki pazarlama tekniklerinin benzerliğine dolaylı bir atıf var. Benzer bir eleştiriye sadece katastrof teorisi bağlamında Arnold'un kitabının girişinde de rastlamak mümkün. Yüzeysel bir benzerlik olsa da daha 1970'li yılların sonunda hem katastrof teorisinin sözcülüğünü hem de eleştirmenliğini yapan bazı isimlere 1980'li yıllarda bu sefer kaos teorisinin şemsiyesi altında rastlıyoruz.[20]

1971 yılında, David Ruelle ve Floris Takens "Çalkantının Doğası Üzerine" adlı bir makale yayınladılar ve o zamana kadar Çalkantı teorisinin temel direklerinden olan bir analize karşı çıktılar.[21] 1940'lı yıllarda Rus fizikçisi L.D. Landau'nun fiziksel prensiplerle

[15] V.I. Arnold, *Catastrophe Theory* (1984) Springer-Verlag, yazımda gerek kaos teorisinin tanımını gerekse katastrof teorisinin tanımını bulamayanlar artık rahatsız olmuş olabilirler. Arnold'un kitapcığı da bu konuda açık değil. Tekillik teorisinin tanımı kolay olmasına rağmen, aynı şeyi katastrof teorisi için söylemek olası değil.

[16] P.T. Saunders, *An Introduction to Catastrophe Theory* (1980).

[17] Katastrof teorisini bir meta-teori olarak görmek Ivar Ekeland'ın da paylaştığı bir tavır. Diğer yandan, Lakatos'un *İspatlar ve Çürütmeler* kitabının alınan metindeki yorumundan sanki matematikte açıklamalar ile ilgili ciddi sorunlar olduğu anlaşılıyor. Bu güzel kitabı okumayanlar için Lakatos'un kitabının matematikte aksiyomların yeni konusunda önemli sorular sorduğunu ve bir teori gelişirken tekrar tekrar aksiyomların gözden geçirilip değiştirilebildiğine değindiğini anımsatalım.

[18] V.I. Arnold, *Catastrophe Theory*, s.76.

[19] Arnold'a göre (ae. s.26) Katastrof teorisinin önemli bir katkısı çekenler (attractor) kavramını ve onların dallanma analizini matematik dünyasına kazandırması. Garip çekenlerden de altıncı bölümde bahsediyor Arnold; Ruelle ve Takens'in makalesini de anmayı ihmal ediyor. Sanırım böyle bir yorum biraz da Arnold'un Katastrof teorisinin etki alanını genişletmeye çabalamasından kaynaklanıyor. Garip çekenler, kaos teorisi içinde de bir muamma olarak belirmiş oysa.

[20] Örneğin Guckenheimer, 1978 yılında Mathematical Intelligencer'da çıkan makalesinde, "Catastrophe Controversy", teorinin bir özetini sunarken, 1980'li yıllarda kaos teorisinin en ateşli savunucuları arasına katılıyor. Benzer bir durum Floris Takens için de geerli, David Ruelle ile yaptığı çalışmaya sonradan değineceğiz.

[21] David Ruelle, 1971'de Communications in Mathematical Physics dergisinde yayımladığı makale ile ilgili bazı bil-

ve Alman matematikçisi Eberhard Hopf'un matematiksel olarak ortaya attıkları çalkantının başlangıcı teorisine göre sıvıların akışında beliren çalkantıları anlamak için yeteri kadar büyük bir k için k-yarı-periyodik bir hareket bulmak yeterliydi.[22] Ruelle ve Takens'in önerdikleri alternatif teoriye göre ise böyle bir k sayısı bulmak imkansızdı. Yerine, sıvıların akışının sonlu ve disipatif bir dinamik sistemin analizi ile açıklanabileceğini savundular. Özellikle, böylesi dinamik sistemlerde görüldüğünü iddia ettikleri tuhaf çekenlerin sonlu boyuta sahip olmaları, problemlerinin analizinin sonlu bir uzayda (yani bir Öklit uzayında) tanımlanmış bir adi diferansiyel denklemler sisteminin analizine indirgenebileceğini iddialarını destekler nitelikteydi.[23] Başlangıçta tuhaf çekenler büyük bir ilgiyle karşılanmadı. Bir yandan formal bir tanımının olmaması, diğer yandan anlaşılmamış bazı çekenlere, örneğin Lorenz denklemlerinin yarattığı kelebeğe benzetilen Lorenz çekenine, bir açıklık getirmiyor olması bu kavrama sıcak bakılmasını engelledi. Oysa yine 1970'li yıllarda, Mandelbrot birçok garip resim biriktiriyor ve bu garip figürler hakkında konuşmalar veriyordu. Değişik geometrik simetri özellikleri bulunan bu kümelere Mandelbrot fraktal adını vermişti, kırılmışlığı ve süreksizliği vurgulamak amacıyla.[24] 1974 yılında bir yandan Mandelbrot gelişmiş çalkantılı akışların açıklanmasında fraktal kümelerin nasıl bir rol oynadığını açıklayadursun, Fransız fizikçi, matematikçi Uriel Frisch dinamik sistemler teorisi ile çalkantılar hakkında nasıl açıklamalara gidilebileceğini öngörüyordu. Gerek tuhaf çekenler, gerekse de fraktal kümelerin çalkantı teorisine katkıları oldukça sınırlı. Amerikalı matematikçi Steven A. Orszag, Uriel Frisch ile "Physics Today"de ortakça yayınladıkları makalede kaos teorisi ile çalkantıların birbirleriyle ilişkili olmalarına rağmen farklı olduklarını dikkatle vurguluyorlar.[25] Fraktal teorisinin etkileri ise söz konusu sunuş yazısında etkisini sürdürmeye devam ediyor. Burada bir parantez açıp kısaca çalkantılarla ilgili genel bir bilgi sunalım.

Çalkantı Teorisi Neyle İlgili?

Kaos teorisinin temel uygulanım alanlarından biri olarak sözü geçen, matematiksel fiziğin henüz çözülmemiş sorunlarından biri olan çalkantıların niteliğinin ve doğasının açıklanması sorunu 1940'lı yıllarda Kolmogorov ve Obukhov'un önerdiği teoriden sonra büyük bir atılım yaşamadı. Bu önemli soruna ne tür bir açıklamanın çözüm teşkil edeceği de açık değil.[26] Tatmin edici bir teoriye ulaşılamayan bu konu, gündelik hayatta bile değişik biçimlerde karşımıza çıkıyor. Örneğin kahvemize kattığımız sütün karışmasına neden olan bu çalkantı, uygun durumlarda havaya bırakılan kirli gazların da dağılmasına yardımcı oluyor. Uçaklar bu tür çalkantılara sık giriyor, gemilerin ve denizaltıların da akıntılar dolayısı ile benzer çalkantıların etkisinde kaldıkları biliniyor. Eğer daha büyük çapta düşünürsek, az esintili havalarda bile dünyamızı saran atmosferin içindeki hava akımları çalkantılı. Çalkantıların doğasının anlaşılmasının gerek meteorolojiye gerekse uçak sanayine ne kadar büyük bir katkısı olacağını görmek mümkün. Kısacası açıklamaya çalıştığım çalkantıların gözle görülebilir doğa olayları olduğu ne kadar açıksa, kaos teorisinin neyle ilgilendiği de o kadar belirsiz. Belirli koşullarda çalkantıların kaotik bir sistem ile modellenebileceği, arzulanan fakat hala ulaşılmamış olan bir özlem.[27]

---

gileri ve makalenin kaderini *Chance and Chaos* adlı kitabında anlatıyor. Aynı kitapta, ne kaosun ne de çalkantı (turbulence)'nın tatmin edici bir tanımının olmaması düşündürtücü. Sadece "çalkantının başlangıcı" (onset of turbulence) adıyla bilinen kısmına değinilmiş.

[22] Tipik bir k-yarı-periodik fonksiyona en basit örnek $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (\sin \frac{2\pi x_1}{L_1}) \cdot (\sin \frac{2\pi x_2}{L_2}) \cdots (\sin \frac{2\pi x_k}{L_k})$. Örneğin, $k = 1$ için, standard periyodik fonksiyonları elde ederken, $k = 2$ için simit yüzeyi (torus) üzerinde tanımlanmış fonksiyonlar elde ediyoruz. Landau'nun teorisinin güzel bir açıklamasını Landau ve Lifshitz'in *Fluid Mechanics* adlı kitabında bulmak mümkün (sf. 103, the onset of turbulence).

[23] Bu konuda yazılmış makale sayısı oldukça fazla. Genel bir giriş yazısı olarak J.P. Eckmann ve D. Ruelle'in Reviews of Modern Physics, v.57, no.3, Temmuz 1985'te yayımlanmış "Ergodic Theory, of Chaos and Strange Attractors" yazısı yeterli. Ruelle'in genel yönünü anlamak için de Bulletin'de Temmuz 1981'de yayımlanmış "Differentiable Dynamical Systems and the Problem of Turbulence" makalesine bakılabilir.

[24] Bu güzel figürlere, felsefi açıklamalara ve yorumlara *Doğanın Fraktal Geometrisi* kitabında rastlamak mümkün. Son yıllarda, birbirinden güzel resimlerle fraktal kümeleri anlatan bir sürü kitap basıldı. Örneğin M. Barnsley'in *Fractals Everywhere* kitabı hem matematiğini anlatmaya çalışıyor, hem de güzel şekillerin nasıl elde edilebileceğini.

[25] U. Frisch ve S.A. Orzsag "Turbulence: Challanges for Theory and Experiment", Physics Today.

[26] Bkz. Dipnot 25.

[27] Yine Physics Today'ın Haziran 1988 sayısında Anil Khurana'nın Şikago deneyini açıklayan yazısından, kaos ile yumuşak çalkantı arasına bir de geçiş bölgesi koyarak, bu iki akış biçimini dikkatle ayrılmış.

Kaos Teorisi Tükendi mi?

Kaos teorisinin çalkantıları açıklamak için kullanılmaya çalışılması, bir model olarak kaotik dinamik sistemlerden yararlanma arzusunu da gösteriyor. Yoksa dinamik sistemlerde, özellikle de doğrusal olmayanlarında, sık rastlanan bu olgunun kaçınılmaya çalışılan bir yanı da var. Basit mekanik sistemlerin kontrolünde dallanma teorisi yardımı ile kaotik rejimlere meydan bırakmayan parametre değerlerine ulaşarak, istenmeyen neticeler engellenebiliyor. Benim yazımda vurgulamaya çalıştığım husus ise, Ruelle'in de kitabında geniş yer ayırdığı, birçok matematikçinin büyük ümitler başladığı bir problemin, çözüm senaryosu ile ilgili. Problem çalkantı problemi ve çözüm senaryosu da kısmen Ruelle-Takens senaryosu adıyla bilinen senaryo. 1992 yılı biterken henüz bu konuda tatmin edici bir gelişme olmadığına inanıyorum. Elbetteki kaos teorisi elini sadece çalkantı problemine atmamış, ama diğer çabaları böylesine cesur değil. Arnold'un da kitabında açıkladığı gibi açıklanmamış muammalar ille de bir teoriyi zayıflatmaz, garip çekenler kavramının garip tarihçesi de bu olguya bir örnek. Ortaya atılmasından en az yirmi yıl sonra, esrar perdesi belki de biraz aralanmış, ama perdenin arkasında ümit edilen bulunamamış. Aynı kavrama daha önceden katastrof teorisinin şemsiyesi altında bakmaya çalışmak benzer bir ümidini gösteriyor matematikçilerin. Uzun yıllardır bu kadar ilgi görmemiş matematik bilimi gerek katastroflar, garip olan ve olmayan çekenler, rengarenk fraktaller, en basit sistemlerde görülen kaotiklerle tekrar sesini duyurdu. Bu kadarcık ilgiyi çok görmemek lazım. Katastrof teorisinin tanıtım başarısı, uygulamalarındaki başarısından çok daha fazla. Fransız filozofu Lyotord bile postmodern dünyada bilimi incelerken René Thom'a ve B. Mandelbrot'a gönderme yapıyor.[28] Tabii ki alıntıladığı "uygulama"ların kabul görmemiş olduğunu bilmeden.[29] Herşeye rağmen, onbeş yılı aşan ömrünü nasıl açıklamalı kaos teorisinin? Yazımda biraz değinmeye çalıştığım gibi bilgisayarların bilim adamlarının/kadınlarının hayatlarına gündelik bir biçimde girmeleri yeni. Eskiden ufak deneylerle eğlenen bazı fizikçiler/matematikçiler artık bilgisayarlarının başında fraktal kümeler üretip, kaotik sistemlerle oynuyorlar. Bir yandan yeni bir "dünya" sunan ekran, diğer yandan da o dünyanın analizi için gerekli araçları sunuyor, işte kaos teorisi de bu araçlardan biri şimdilik. Arizona Eyalet Üniversitesi'nde öğrencilere kaos teorisini tanıtmak için verilen bir konuşmanın başlığı: "Kaos cidden var mı, yoksa bir bilgisayarın hayal ürünü mü?" idi. Konuşmayı dinlediğim halde henüz karar verebilmiş değilim. Yine de yeni bir düzen arayışının elçisi olarak kaos hem matematikçilerin hem de bilgisayarların "zihni"ni bir süre daha meşgul edecek galiba.[30]

EĞLENCELİK

$22 \cdot 5 = 55 \cdot 2 = 110$
$222 \cdot 55 = 555 \cdot 22 = 12210$
$2222 \cdot 555 = 5555 \cdot 222 = 1233210$
$22222 \cdot 5555 = 55555 \cdot 2222 = 123443210$
$222222 \cdot 55555 = 555555 \cdot 22222 = 12345543210$
$2222222 \cdot 555555 = 5555555 \cdot 222222 = 1234566543210$
$22222222 \cdot 555555 = 55555555 \cdot 2222222 = 123456776543210$
$222222222 \cdot 55555555 = 555555555 \cdot 22222222 = 12345678876543210$
$2222222222 \cdot 555555555 = 5555555555 \cdot 222222222 = 1234567899876543210$

Orhan Giraz, Eskişehir Fatih Fen Lisesi 2. sınıf öğrencisi

[28] J.-F. Lyotard, *Postmodern Durum* (1990), Ara Yayıncılık, s.74-77.

[29] I. Ekeland, deneysel bilimlerde katastrof teorisinin eleştiriyle karşılaşmamış bir uygulamasının olmadığını vurguluyor (s.102).

[30] Yazımı tamamladıktan sonra Matematik Dünyası'nın Ocak 1992 sayısında bir yazı gözüme ilişti: A. Sangalli'nin "Bilgisayarlar İspat Peşinde". Konumuzla ilgisi olduğundan burada anımsatayım dedim.

LİMİTLER, LİMİTLER

Yusuf Avcı & Nurettin Ergun *

Akıllı insan zehir sunsa al iç
Nobran bal şerbeti uzatsa sakın ha!
Ömer Hayyam

Gerçel sayı dizilerine ilişkin limit bilgisi çok önemlidir. Kendi başına çok önemli olmanın ötesinde, gerçel değişkenli ve gerçel değerli fonksiyonların sürekliliklerini açıklama, kavrama ve kanıtlamada belki daha da önemlidir. Biz bu yazıda, hepsi de kendi başlarına yeterince ilginç olan dört ünlü limit probleminin çözümleri ile ilgileneceğiz. Supremum ve infimum kavramlarını ve bir gerçel sayıya yakınsamanın ne demek olduğunu az çok bilen herkesin, kanıtlamalara katılma çabası gösterdiğinde, anlatılanları kavrayacağını umuyoruz. Yalnızca gerçel sayı dizileri ile ilgileneceğiz.

Boş olmayan bir $A \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesinin bir *üst sınırı*, $\forall\, a \in A$ için $a \leq \alpha$ eşitsizliğini gerçekleyen α gerçel sayısıdır; *en küçük üst sınırı* yanı *supremumu* ise A'nın bu nitelemeye uyan özel üst sınırıdır, yani kendisinden kesin küçük kalan hiç bir gerçel sayının A'nın bir üst sınırı olamadığı üst sınırıdır; başka bir yazışla, A nın α üst sınırına ancak ve yalnız

$$\forall\, \epsilon > 0 \text{ için } \exists a_\epsilon \in A,\ \alpha - \epsilon < a_\epsilon$$

koşulu gerçeklendiğinde A kümesinin supremumu denir ve $\alpha = \sup A$ ya da $\alpha =$ eküs A yazılır. Alt sınır ve *en büyük alt sınır* yani *infimum* kavramları benzer biçimde tanımlanır.

Ana Teorem. i) Üstten sınırlı ve boş olmayan herhangi bir $A \subset \mathbb{R}$ alt kümesinin tek bir supremumu vardır.

ii) Alttan sınırlı ve boş olmayan herhangi bir $A \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesinin tek bir infimumu vardır.

Problem 1. Bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisinin, yakınsak bir alt dizisinin yakınsadığı gerçel sayıya $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dizisinin bir yığılma noktası* denir. Hatırlatma: İndisleri yani numaraları, kesinlikle artan $n_1 < n_2 < \cdots < n_m < n_{m+1} < \cdots$ doğal sayıları olan terimlerin oluşturduğu $\{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ dizisine, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin bir *alt dizisi* denir.

$$\{a_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty},\ \{a_{3n+2}\}_{n=1}^{\infty},\ \{a_{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$$

dizileri $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin alt dizi örnekleridir. Örneğin ilkinde $n_m = 2m-1$ dir. a_{n_m} teriminin esas dizideki numarasının n_m buna karşılık alt dizideki numarasının m olduğuna dikkat edilmelidir. Sonlu tane yığılma noktası olan bir kaç diziyi anımsayalım:

$$a_n = (-1)^n,$$

$$b_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + \frac{1}{n},$$

$$c_n = \begin{cases} (-1)^{[\frac{n}{2}]} + \frac{1}{n}, & n \text{ tek};\\ \frac{1}{\log n}, & n \text{ çift}. \end{cases}$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin yığılma noktaları yalnızca $x = -1$ ve $x = 1$'dir. $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin yalnızca $x = 0$ ve $x = 1$ yığılma noktalarına yakınsayan alt dizileri vardır. $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin yığılma noktaları ise $-1, 0$ ve 1'dir. Şimdi şuna dikkat edelim:

$$1+\frac{1}{1}, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, \ldots;$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{1}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \ldots; \ldots;$$

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{1}, \frac{1}{m}+\frac{1}{2}, \frac{1}{m}+\frac{1}{3}, \ldots; \ldots$$

rasyonel sayıları "sayılabilir tanedir", yani doğal sayılarla indislenebilirler (numaralanabilirler). Böyle bir numaralama ile bir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi tanımlanmış olur. Bu dizinin tüm yığılma noktalarının

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{m}, \ldots, 0$$

olduğunu okuyucu görebilmelidir. Demek ki sonsuz tane yığılma noktası olan gerçel sayı dizileri tanımlanabilir. Dahası, bütün pozitif rasyonel sayıları, ki sayılabilir tanedirler, numaralayarak tanımlanan $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin tüm yığılma noktaları kümesi ise $[0, \infty)$ aralığıdır, neden? Herhangi

* İstanbul Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyeleri

bir $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisinin tüm yığılma noktaları kümesinin infimumu $\underline{\lim}\ x_n$ ya da $\liminf_n x_n$ işareti ile gösterilir. Sözü edilen infimum yoksa $\underline{\lim}\ x_n = -\infty$ yazılır. $\overline{\lim} x_n$ ya da $\limsup_n x_n$ işareti ile de sözü edilen dizinin tüm yığılma noktalarının supremumu gösterilir. Şu bilgileri ekleyelim: i) Bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi yakınsak ise tüm alt dizileri de aynı limite yakınsar; ii) $\underline{\lim}\ x_n$ ister bir gerçel sayı ister $-\infty$ olsun, daima $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin bir yığılma noktasıdır, yani $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin uygun bir alt dizisi $\underline{\lim}\ x_n$ değerine yakınsar; iii) Benzer gerçekler $\overline{\lim} x_n$ için geçerlidir. Bu ilk bölümde şu problemle uğraşacağız: *Sonlu tane yığılma noktası olan öyle sınırlı bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi bulalım ki, bu dizinin aritmetik ortalamalar dizisinin sonsuz tane yığılma noktası olsun.* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin aritmetik ortalamalar dizisi, terimleri $\sigma_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ olan $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisidir. Önce gerekli temel bilgileri görelim:

1.1. $\underline{\lim}\ a_n = \sup_n \inf\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ ve $\overline{\lim} a_n = \inf_n \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ eşitlikleri herhangi bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için daima geçerlidir. Bunları, yazıyı uzatmamak için göstermiyoruz. O halde şu çok önemli sonuca ulaşılır: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi sınırlı ise, yani her bir $n \in \mathbb{N}$ için $a \le a_n \le b$ gerçekleniyorsa, $a \le \underline{\lim}\ a_n \le \overline{\lim} a_n \le b$ kolayca elde edileceğinden, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin $[a, b]$ aralığındaki en az bir gerçel sayıya yakınsayan yakınsak bir alt dizisi vardır, neden?

1.2. Herhangi bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ gerçel sayı dizisi ve bu dizinin herhangi bir $\{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisi için daima $\underline{\lim}\ a_n \le \underline{\lim}\ a_{n_m}$ geçerlidir. Elbette, çünkü $\{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisinin yakınsak herhangi bir alt dizisi, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisidir, neden? Dolayısı ile $\{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ dizisinin herhangi bir yığılma noktası olan ℓ için $\underline{\lim}\ a_n \le \ell$ geçerlidir. İstenen eşitsizlik hemen elde edilir.

1.3. $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ bir gerçel sayıya yakınsıyorsa, herhangi bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $\underline{\lim}\ (a_n + b_n) = \underline{\lim}\ a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$ geçerlidir. Gerçekten $\ell_1 = \underline{\lim}\ a_n$ bir gerçel sayı ise, $\ell_1 = \lim_{m\to\infty} a_{n_m}$ gerçekleyen $\{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisini belirleyen $n_1 < n_2 < \cdots n_m < \cdots$ numaraları yardımı ile önce $\ell_2 = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{m\to\infty} b_{n_m}$ ve sonuçta $\ell_1 + \ell_2 = \lim(a_{n_m} + b_{n_m})$ gerçekleneceğinden, tanım gereği hemen, $\underline{\lim}\ (a_n + b_n) \le \ell_1 + \ell_2$ bulunur. $\underline{\lim}\ (a_n + b_n) < \ell_1 + \ell_2$ gerçekleşemeyeceği kolayca görülür, çünkü aksi halde,

$$\lim_{m\to\infty}(a_{N_m} + b_{N_m}) = \underline{\lim}\ (a_n + b_n)$$

gerçekleyen yakınsak bir $\{a_{N_m} + b_{N_m}\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi var olurdu ve sonuçta

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} a_{N_m} &= \lim_{m\to\infty}((a_{N_m} + b_{N_m}) - b_{N_m}) \\
&= \underline{\lim}\ (a_n + b_n) - \lim_{m\to\infty} b_{N_m} \\
&= \underline{\lim}\ (a_n + b_n) - \ell_2 \\
&< \ell_1 \le \lim_{m\to\infty} a_{N_m}
\end{aligned}$$

çelişkisi doğardı. $\underline{\lim}\ a_n = -\infty$ halini okuyucuya bırakıyoruz.

1.4. Herhangi bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi ve herhangi $0 < \epsilon$ verildiğinde, $\forall\, n \ge N$ için $\underline{\lim}\ a_n - \epsilon < a_n$ gerçeklenir. Elbette, yine $\underline{\lim}\ a_n = -\infty$ halini apaçık olduğundan irdelemeden geçiyoruz. Şimdi $\underline{\lim}\ a_n = \ell$ bir gerçel sayı iken, sözü edilen nitelikte bir N doğal sayısı tanımlanamasaydı, öncelikle öyle bir $1 < n_1$ doğal sayısı var olurdu ki $a_{n_1} \le \ell - e$ geçerli olurdu. O halde yine öyle bir $2n_1 < n_2$ vardır ki $a_{n_2} \le \ell - \epsilon$ olurdu, vb. Tümevarım ve bu düşünceler yardımı ile öyle bir $\{a_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisi tanımlanabilirdi ki her bir $m \in \mathbb{N}$ için $a_{n_m} \le \ell - \epsilon$ ve sonuçta

$$\inf\{a_{n_m}, a_{n_{m+1}}, a_{n_{m+2}}, \ldots\} \le \ell - \epsilon$$

geçerli olurdu. Sonuçta

$$\begin{aligned}
\underline{\lim}\ a_{n_m} &= \sup_m \inf\{a_{n_m}, a_{n_{m+1}}, a_{n_{m+2}}, \ldots\} \\
&\le \ell - \epsilon < \ell \le \underline{\lim}\ a_{n_m}
\end{aligned}$$

çelişkisi doğardı.

1.5. Herhangi bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için daima

$$\underline{\lim}\ a_n \le \underline{\lim}\ \sigma_n \le \overline{\lim} \sigma_n \le \overline{\lim} a_n$$

geçerlidir. Biz yalnızca $\underline{\lim}\ a_n \le \underline{\lim}\ \sigma_n$ eşitsizliğini gösterelim. $\underline{\lim}\ a_n = -\infty$ hali apaçıktır. Şimdi $\ell = \underline{\lim}\ a_n$ bir gerçel sayı olsun. $0 < \epsilon$ yeterince küçük olsun. **1.4.** nedeniyle, uygun bir N sabit doğal sayısı sayesinde, $\forall\, n > N$ için $\ell - \epsilon < a_n$ geçerli olduğundan, sonuçta $n > N$ için

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_N}{n} \\
&\quad + \frac{a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_n}{n} \\
&> \frac{A}{n} + \frac{(n-N)(\ell - \epsilon)}{n} \\
&= \frac{A}{n} + (\ell - \epsilon)(1 - \frac{N}{n})
\end{aligned}$$

geçerli olur ve dolayısı ile **1.3.** yardımı ile, kolayca

$$\underline{\lim}\,\sigma_n \geq \underline{\lim}\left(\frac{A}{n}+(\ell-\epsilon)\left(1-\frac{N}{n}\right)\right)=\ell-\epsilon$$

bulunur; burada $A = a_1+a_2+\cdots+a_N$ yazılmıştır. Okuyucu, çok zorlanmadan

$$\forall\, n \geq N,\quad \alpha_n \leq \beta_n \quad \text{ise} \quad \underline{\lim}\,\alpha_n \leq \underline{\lim}\,\beta_n$$

olduğunu gösterebilir ve bunu yapmalıdır. O halde her bir pozitif ϵ için $\ell-\epsilon \leq \underline{\lim}\,\sigma_n$ olmaktadır. Bu ise, $\ell \leq \underline{\lim}\,\sigma_n$ demektir; aksi halde kaçınılmaz olarak $\underline{\lim}\,\sigma_n+\epsilon_0 < \ell-\epsilon_0$ gerçekleyen bir pozitif ϵ_0 var olurdu, neden?

1.6. Şimdi problemimizi çözelim. Şu diziyi tanımlayalım. $a_1 = 1, a_2 = -1$ ve her m doğal sayısı için

$$(*)\qquad a_n = \begin{cases} 1, & 2^m < n \leq 2^m+2^{m-1}; \\ -1, & 2^m+2^{m-1} < n \leq 2^{m+1}. \end{cases}$$

Demek ki, $a_3 = 1, a_4 = -1, a_5 = a_6 = 1, a_7 = a_8 = -1, \ldots$ olmaktadır. Bu dizinin tastamam iki yığılma noktası olduğu halde, aritmetik ortalamalar dizisi $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ şunları gerçekler. Önce her $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma_{2^n} = 0$ olur, çünkü dikkat edilirse burada pay, yani $a_1+a_2+\cdots a_{2^n}$, önce $a_3+a_4+\cdots+a_{2^n}$ dir ve dolayısı ile

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}&\big((a_{2^k+1}+\cdots+a_{2^k+2^{k-1}})\\ &+(a_{2^k+2^{k-1}+1}+\cdots+a_{2^{k+1}})\big)\\ &=\sum_{k=1}^{n-1}(2^{k-1}-2^{k-1}),\end{aligned}$$

yani sıfırdır. Şimdi k sabit doğal sayısını alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\sigma_{2^n+2^{n-k}} &= \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_{2^n})}{2^n+2^{n-k}}\\ &+\frac{(a_{2^n+1}+a_{2^n+2}+\cdots+a_{2^n+2^{n-k}})}{2^n+2^{n-k}}\\ &=\frac{2^{n-k}}{2^{n-k}(1+2^k)}=\frac{1}{2^k+1}\end{aligned}$$

olur, çünkü pay ifadesinde yer alan ilk parantez sıfırdır. İkinci parantez içinde toplam 2^{n-k} tane $+1$ vardır, çünkü bu ikinci parantezdeki tüm terimlerin numaraları apaçıktır ki $> 2^n$ ve üstelik $\leq 2^n+2^{n-1}$ gerçeklerler. Demek ki (*) dizisinin aritmetik ortalamalar dizisinin,

$$0, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{2^k+1}, \ldots$$

değerlerini alan (ve dolayısı ile bu değerlere yakınsayan) birer sabit alt dizisi vardır. Peki, $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin başka yığılma noktası var mıdır?

Problem 2. Şimdi de şu diziyi araştıralım: *Öyle sınırlı bir* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *gerçel sayı dizisi tanımlayalım ki kendisi ve aritmetik ortalamalar dizisi arasında*

$$\underline{\lim}\,a_n < \underline{\lim}\,\sigma_n < \overline{\lim}\,\sigma_n < \overline{\lim}\,a_n$$

eşitsizlikleri geçerli olsun. İstenen nitelikte bir örneğin, yukarıda tanımlanan $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi olduğunu okuyucu kolayca görecektir.

Problem 3. $[0,1)$ aralığındaki tüm x gerçel sayılarının tam kısımları $[x] = 0$ gerçekler. Bu sayıların herhangi birisinin $x = 0,x_1x_2x_3\cdots$ şeklinde, bir ve bir tek türlü belirlenmiş bir *2-tabanlı açılımı* vardır. Burada $x_1, x_2, \ldots$ tamsayıları, ya 0 ya 1 tamsayılarıdır; bunların belirli bir adımdan sonra hep 1 gitmelerini genelliği bozmaksızın yasaklayabiliriz. Vietoris 1921'de şu ilginç örneği önerdi:

$$f(0,x_1x_2x_3\ldots) = \overline{\lim}\,\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

şeklinde tanımlanan $f : [0,1) \longrightarrow [0,1)$ *fonksiyonu,* $0 < \epsilon < \delta < 1$ *sayıları ne olursa olsun* $f([\epsilon,\delta]) = [0,1[$ *gerçekler*; kısacası bu fonksiyon, tanım aralığındaki herhangi bir alt aralıkta, inanılmaz ve grafiği çizilemez bir biçimde süreksiz salınımlar yapmaktadır. Kanıtlamayı yine adım adım yapalım.

3.1. Herhangi bir $0 \leq r_0 = \frac{m_0}{n_0} < 1$ rasyonel sayısına karşılık $x_0 = 0,\overline{000\ldots011\ldots1} \in [0,1)$ şeklinde tanımlanan x_0 gerçel sayısı $f(x_0) = r_0$ gerçekler; burada virgülden sonraki ilk $n_0 - m_0$ tane basamağın tümü 0, son m_0 tane basamağın tümü ise 1'dir ve x_0 sayısı, n_0 uzunluğundaki bu kalıbı sürekli tekrarlamaktadır. Dikkat edilirse basamakların aritmetik ortalamalar dizisinin

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n_0}}{n_0}, \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2n_0}}{2n_0}, \ldots$$

terimlerinden oluşan alt dizisi r_0 rasyonel sayısına yakınsar, çünkü bu alt dizinin tüm terimleri zaten $\frac{m_0}{n_0} = r_0$ 'dır. Şimdi, doğal sayıların herhangi bir $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ artışı ile belirlenen $\{\sigma_{h_k}\}_{k=1}^{\infty}$ alt dizisine bakalım. Her bir n_k için, $N_k n_0 \leq n_k < (N_k+1)n_0$ gerçekleyen ve tek türlü belirlenebilen bir N_k doğal sayısı vardır ve elbette

$$\begin{aligned}\sigma_{n_k} &= \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_k}}{n_k} \\ &\le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{(N_k+1)n_0}}{N_k \cdot n_0} \\ &= \frac{(N_k+1)m_0}{N_k \cdot n_0} = r_0\left(1 + \frac{1}{N_k}\right)\end{aligned}$$

nedeniyle, aritmetik ortalamalar dizisinin tüm diğer yakınsak alt dizilerinin limitleri $\le r_0$ ve hatta $= r_0$ gerçekler, neden? Bu nedenle $f(x_0) = r_0$ olur.

3.2. Herhangi bir $0 < q < 1$ irrasyonel sayısına monoton artarak yakınsayan bir $r_k = \frac{m_k}{n_k}$ pozitif rasyonel sayılar dizisi vardır. Önce $0 < r_1 < q$ gerçekleyen r_1 rasyonel sayısını, sonra $\max\{r_1, (q - \frac{1}{2})\} < r_2 < q$ gerçekleyen r_2 rasyonel sayısını, sonra $\max\{r_2, (q - \frac{1}{3})\} < r_3 < q$ gerçekleyen r_3 sayısını, v.b., belirleriz. İstenen $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi tümevarımla tanımlanır. Bu dizinin paydalarında yer alan n_k doğal sayıları sonsuz tanedir. Sonlu tane olsalardı, sonsuz tane $r_{k_1}, r_{k_2}, \ldots$ rasyonel sayısının paydasında aynı bir N doğal sayısı kullanılmış olurdu ki bu olanaksızdır, neden? Demek ki genelliği bozmaksızın, yukarıdaki dizinin paydalarının $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$ gerçeklediğini varsayabiliriz, neden? O halde

$$m_k = n_k r_k < n_{k+1} r_k < n_{k+1} r_{k+1} = m_{k+1}$$

nedeniyle paylar da kesin bir monoton artış gösterirler. Şimdi $m_k - m_1 < n_k - n_1$ olacak şekilde bir k doğal sayısı bulalım. Tüm k indisleri için $n_k - n_1 \le m_k - m_1$ olsaydı,

$$f - \frac{n_1}{n_k} \le r_k - \frac{m_1}{n_k}$$

eşitsizlikleri bize $1 \le q$ çelişkisini verirdi, neden? Bundan sonra $m_k - m_1 < n_k - n_1$ gerçekleyen k doğal sayılarının en küçüğüne k_2 ve sonra $m_k - m_{k_2} < n_k - n_{k_2}$ gerçekleyen k doğal sayılarının en küçüğüne k_3 diyelim v.b.. Tümevarımla öyle yeni bir $R_k = \frac{M_k}{N_k}$ pozitif rasyonel sayı dizisi tanımlayabiliriz ki, kesin monoton artarak q irrasyonel sayısına yakınsar; hem paylar, hem de paydalar kesin artarlar ve üstelik $M_k - M_{k-1} < N_k - N_{k-1}$ eşitsizlikleri her bir k indisi için geçerlidir. Şimdi

$$x_q = 0,\underbrace{000..011..1}\underbrace{000..011..1}\ldots$$

şeklinde tanımlanan x_q gerçel sayısını göz önüne alalım. İlk N_1 tane basamağın ilk $N_1 - M_1$ tanesi 0, son M_1 tanesi 1 dir, hemen ardından gelen $N_2 - N_1$ tane basamağın ilk $(N_2 - N_1) - (M_2 - M_1)$ tanesi 0 ve son $M_2 - M_1$ tanesi 1'dir, ardı sıra gelen $N_3 - N_2$ tane basamağın ilk $(N_3 - N_2) - (M_3 - M_2)$ tanesi 0 ve son $M_3 - M_2$ tanesi 1 dir v.b.. Okuyucu artık $f(x_q) = q$ gerçeklendiğini, tıpkı **3.1.**'deki gibi gösterebilir.

3.3. $(0,1)$ aralığındaki 2-açılımlı herhangi bir $x = 0, x_1x_2x_3\cdots$ sayısı ve herhangi bir sabit N doğal sayısı verilsin. $a_1, a_2, \ldots, a_N$ tam sayıları gelişi güzel 0 ve 1'ler olmak üzere

$$f(0, a_1a_2\cdots a_N x_1x_2x_3\cdots) = f(x)$$

geçerli olur, çünkü her bir $n > N$ için, yeni tanımlanan gerçel sayının basamak ortalamaları

$$\begin{aligned}&\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_N + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-N}}{n} \\ &= \frac{A}{n} + \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \\ &\quad - \frac{x_{n-N+1} + x_{n-N+2} + \cdots + x_n}{n}\end{aligned}$$

gerçekler; burada $A = a_1 + a_2 + \cdots + a_N$ yazılmıştır ve

$$0 \le x_{n-N+1} + x_{n-N+2} + \cdots + x_n \le N$$

gerçeklendiğinden (neden?),

$$\xi_n = \frac{A}{n} - \frac{x_{n-N+1} + x_{n-N+2} + \cdots + x_n}{n}$$

dizisi sıfıra yakınsar. Sonuçta $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ yakınsak bir dizi olmak üzere, **1.3.**'ün benzeri olan

$$\overline{\lim}(\alpha_n + \beta_n) = \overline{\lim}\,\alpha_n + \lim_{n\to\infty} \beta_n$$

bilgisi kullanılarak istenen iddia elde edilir.

3.4. $(0,1)$ aralığında, 2-tabanlı açılımları

$$x = 0, x_1x_2x_3\cdots \quad \text{ve} \quad y = 0, y_1y_2y_3\cdots$$

olan her hangi iki gerçel sayının $x < y$ gerçekleyebilmesi için gerek ve yeter koşul, ilk farklı basamaklar olan $x_m \ne y_m$ için $x_m < y_m$ gerçeklenmesidir. Örneğin

$$x_1 = y_1,\ x_2 = y_2, \ldots, x_{m-1} = y_{m-1}$$

ve

$$x_m = 0 < 1 = y_m$$

ise,

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} = \sum_{k<m} \frac{y_k}{2^k} + \frac{0}{2^m} + \sum_{k>m} \frac{x_k}{2^k} \\
&< \sum_{k<m} \frac{y_k}{2^k} + \left(\frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \cdots \right) \\
&= \sum_{k<m} \frac{y_k}{2^k} + \frac{1}{2^m} = \sum_{k<m} \frac{y_k}{2^k} + \frac{y_m}{2^m} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n} = y
\end{aligned}$$

elde edilir. Hem gerek, hem yeter koşul gösterilmiş oldu, neden? Burada x'in $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots$ basamaklarının tümünün 1 olmadığını söyleyen bilginin kullanıldığına dikkat ediyor muyuz? Bu sonuç bir bakıma, *göstergebilim* sözcüğünün, sözlükte *göstergesiz* sözcüğünden önce gelmesine benzemektedir; ilk farkeden harf de (basamakta) alfabetik sıralama gözönüne alındığında $b < s$ olmaktadır.

3.5. Şimdi yeterince küçük pozitif $\epsilon < \delta$ sayıları verilsin. $\frac{1}{2^m} < \frac{\delta - \epsilon}{2}$ gerçekleyen bir m doğal sayısı belirlensin.

$$\frac{0}{2^m}, \frac{1}{2^m}, \ldots, \frac{k}{2^m}, \ldots, \frac{2^m - 1}{2^m}, \frac{2^m}{2^m}$$

kesirli sayılarından ardışık iki tanesi

$$\epsilon < \frac{k}{2^m} < \frac{k+1}{2^m} < \delta$$

gerçekler, çünkü dikkat edilirse,

$$\frac{k-1}{2^m} \leq \epsilon < \frac{k}{2^m}$$

gerçeklenecek biçimde tek bir $k < 2^m$ vardır (neden?) ve üstelik $\delta \leq \frac{k+1}{2^m}$ olamaz, neden? O halde

$$f\left(\left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m} \right] \right) = [0, 1)$$

gösterebilirsek, $f([\epsilon, \delta]) = [0, 1)$ sonucu kolayca elde edilir. Bu sonuncuyu göstermek ise çok kolaydır. k tam sayısının, $a_0, a_1, \ldots, a_m$ tam sayıları 0 ya da 1 olmak üzere,

$$k = a_0 2^0 + a_1 2^1 + \cdots + a_m 2^m$$

biçiminde tek türlü yazılabildiğini bildiğimizden, $\frac{k}{2^m}$ kesirli sayısının 2-tabanlı açılımı

$$\frac{k}{2^m} = 0,\ a_m a_{m-1} a_{m-2} \cdots a_0 000 \cdots$$

olur. Benzer biçimde

$$\frac{k+1}{2^m} = 0,\ b_m b_{m-1} \cdots b_0 000 \cdots$$

ve üstelik

$$0, a_m a_{m-1} \cdots a_0 00 \cdots < 0, b_m b_{m-1} \cdots b_0 00 \cdots$$

geçerlidir. Şimdi **3.1.**'de tanımlanan x_0 gerçel sayısının açılımı $x_0 = 0, x_{01} x_{02} x_{03} \cdots$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\frac{k}{2^m} &< x^* = 0, a_m a_{m-1} \cdots a_0 1 x_{01} x_{02} x_{03} \cdots \\
&< \frac{k+1}{2^m}
\end{aligned}$$

ve üstelik **3.3.** nedeniyle $f(x^*) = r_0$ olacağı apaçıktır. Aynen, $f(x_q^*) = q$ ve

$$\frac{k}{2^m} < x_q^* < \frac{k+1}{2^m}$$

gerçekleyen x_q^* gerçel sayısı da **3.2.**'deki x_q yardımıyla tanımlanır. Bitti!

Problem 4. Şu iddia kuşkusuz çok şaşırtıcıdır: *Herhangi bir pozitif terimli* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dizisi için*

$$\overline{\lim} \left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} \right)^n \geq e$$

gerçeklenir. Dikkat: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi bir gerçel sayıya yakınsarsa bu üst limit $+\infty$ 'dur. Örneğin $\lim a_n = a > 0$ ise, uygun bir $N_1 \in \mathbb{N}$ sayesinde, $n \geq N_1$ için

$$(1+\epsilon)^n < (A-\epsilon)^n < \left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} \right)^n$$

gerçeklenir, çünkü $a_1 > 0$ ve

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_1 + a}{a} = A > 1$$

nedeniyle uygun bir $0 < \epsilon$ sayesinde $1+\epsilon < A-\epsilon$ olur. Eğer $\lim a_n = 0$ ise, $n \geq N_2$ için bu kez

$$2 < \frac{a_1}{a_n} < \frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n}$$

olur. Şimdi okuyucu, genel halde bu problem yerine, onun eşdeğeri olan

$$\begin{aligned}
\overline{\lim} \left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} \right)^n \cdot \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\
= \overline{\lim} \left(\frac{n(a_1 + a_{n+1})}{(n+1)a_n} \right)^n \geq 1
\end{aligned}$$

eşitsizliğini göstermeye çalışmalıdır. Bu problemin güzel bir çözümü için, Türk Matematik Derneği yayınlarından No:29, *Matematikte Endüksiyon ve Benzetme*, G. Polya, Cilt 1, 1966, (Çeviren: Orhan İçen) s.131'e başvurulabilir.

ÜÇ BİR DÖRT BİR VE GERİSİ

Şafak Alpay *

"Pi" sayısı herhangi bir dairenin çevresinin çapına oranı olarak tanımlanır. Eski Çinli matematikçiler tarafından 3, Ahmes papirüsünde ise 3.1605 olarak kabul edilen 'pi' sayısı için kullanılan yaygın imge Yunan abc'sinde p harfine karşılık gelen π dir. İlk kez 18. yy başlarında İngilizler tarafından kullanılan bu imge 1737'de Euler'in de kullanması ile gelenek haline gelen bir gösterim olmuştur. $q, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ tam sayılar olmak üzere

$$q + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{10^2} + \cdots + \frac{q_n}{10^n} + \cdots = q, q_1 q_2 \cdots q_n \cdots$$

biçimindeki toplama ondalık açılım dendiğini biliyoruz [1]. Her gerçel sayının tek bir ondalık açılımla temsil edildiğini ve her ondalık açılımın da bir gerçel sayı olduğunu yine [1]'den biliyoruz.

Yazar		Tarih	Basamak Sayısı
Ptolemy	M.Ö.	150	4
Viete		1579	10
Romanus		1593	16
Van Ceulen		1610	33
Snell		1621	35
Sharp		1699	72
Machin		1706	101
Vega		1794	137
Desa		1844	201
Rutherford		1853	441
Shanks		1873	707†
Aberdeen Prov. Grd.		1949	2.036
Watson Sci. Lab.		1954	3,093
Genuys ve Felton		1959	10.000
Shanks ve Wrench		1961	100.000
Gilloud ve Fillatoire		1966	250.000
Gilloud ve Dichampt		1967	500.000
Gilloud ve Bouyer		1976	1.000.000
Miyochi ve Nakayama		1981	2.000.038
Tamura ve Kanada		1982	4.194.293‡

† Bu açılımda sadece ilk 527 basamak doğrudur.

‡ Gerekli bilgisayar zamanı 2 saat 53 dakika idi.

Bir ondalık açılımın rakamları belli uzunlukta rakam blokları biçiminde tekrarlanırsa bu açılıma periyodlu açılım denir. Kesirli sayıların ondalık açılımlarının periyodlu olduğunu ve periyodlu ondalık açılımların kesirli sayılar oldukları [1]'de kanıtlanmıştı. Daha sonra da göreceğimiz gibi π sayısı kesirli bir sayı değildir. 1770'de kanıtlanan bu gerçeğe kadar π sayısının açılımının merak edilmesi doğaldır.

π 'nin açılımı hakkında elde edilecek bilgi kesirli olup olmadığına karar verecekti. π nin açılım tarihi yukarıdaki çizelgede kısaca görülüyor.

π sayısının açılımı ile ilgili çözülememiş savlar vardır. Bunlardan biri π sayısının açılımında görünen sayıların tamamen rastgele olduğudur. Başka bir deyişle bu açılımda $0, 1, 2, \ldots, 9$ sayılarının elde edilme olasılığı $1/10$; $00, 01, \ldots, 99$ ikililerinin elde edilmesi olasılığı $1/100$; $000, 001, \ldots, 999$ üçlülerinin gözükmesi olasılığı $1/1000$ olarak ileri sürülmüştür. Yukarıda sıralanan hesaplamalar ünlü matematikçi John von Neumann tarafından yapılan π sayısı açılımındaki sayı dağılımının düzgün rastgele olduğu savını güçlendirmiştir. Henüz kanıtlanamayan bu savlar π hakkındaki sorulardan bazılarıdır.

Yukarıdaki hesaplamalar bize Arşimet'in M.Ö. 240 yılında bulduğu π 'nin alt ve üst sınırlarını veren yöntem kadar heyecan vermiyor. Arşimed birim çaplı dairede, daire içine çizilen düzgün kirişler çokgeni ile daire dışına çizilen düzgün teğetler çokgenini düşünüyor [2]. Düzgün çokgenlerin alanları kolayca hesaplandığından, 12, 24, 48 ve 96 kenarlı düzgün kiriş ve teğetler dörtgenlerinin alanlarını bularak π için $223/71 < \pi < 22/7$ eşitsizliğini başka bir değişle π için yaklaşık değer olarak 314'ü veriyor.

$[-1, 1]$ aralığındaki her x için

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

sonsuz toplamı $\tan^{-1} x$ 'e eşittir. 1671 yılında İskoçyalı matematikçi James Gregory'nin farkına vardığı bu gerçek ile birçok hesap yapılabilir. Örneğin $x = 1$ için

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

elde ederiz. 1699 yılında Sharp $\tan^{-1} x$ 'nin yukarıdaki seri açılımını $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ için kullanarak π sayısının ilk 71 basamağı hesaplamayı başarıyor. 1719 yılında De Laguy $\tan^{-1} x$ serisini $\sqrt{\frac{1}{3}}$ noktasında kullanarak π 'nin ondalık açılımında bilinen basamak sayısını 112'ye çıkarıyor. 1706'da Machin ise yine $\tan^{-1} x$ 'in seri açılımını ve

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$$

eşitliğini kullanarak π 'nin ondalık açılımında ilk 100 basamağı bulabiliyor.

Bilgisayarlarda hesaplar ve doğrulamalar

$$\pi = 24\tan^{-1}\frac{1}{8} + 8\tan^{-1}\frac{1}{57} + 4\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

veya

$$\pi = 48\tan^{-1}\frac{1}{18} + 32\tan^{-1}\frac{1}{57} - 20\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

gibi eşitlikler yardımı ile yapılıyor. Örneğin Miyashi ve Nakayama tarafından π 'nin açılımındaki 2 milyon küsuruncu basamağı veren hesaplamada

$$\pi = 32\tan^{-1}\frac{1}{10} - 4\tan^{-1}\frac{1}{239} - 16\tan^{-1}\frac{1}{515}$$

gibi yine bir $\tan^{-1}$ formülü ile yapılıyor. Tamura ve Kanada'nın yöntemi $\tan^{-1}$ formülleri kullanan klasik yaklaşımdan farklı. Bu yazarlar 19. yüzyılda Legendre ve Gauss tarafından bulunan hesaplama yöntemlerini geliştiren yenileme (iteratif) yöntemleri kullanıyorlar. Matematiğin Sayısal Analiz dalının uğraştığı problemler hakkında bir fikir vermek amacı ile şimdi bu yöntemi verelim: $a_0 = 1$, $b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ alalım ve her n için

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}),\ b_n = (a_{n-1}b_{n-1})^{1/2}$$

ve

$$c_n = a_n^2 - b_n^2$$

tanımlayalım. Eğer

$$\pi_n = \frac{4a_{n+1}^2}{(1 - \sum_{j=1}^{n} 2^{j+1}c_j^2)}$$

olarak tanımlanırsa, $\lim_{n\to\infty} \pi_n = \pi$ oluyor ve π_n ile π arasındaki fark (hata); $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ olmak üzere

$$|\pi - \pi_n| < \frac{\pi^2 2^{n+4}}{A^2}\exp(-\pi 2^{n+1})$$

ile veriliyor.

Şimdi π sayısının kesirli bir sayı olmadığını görelim. Bu gerçek için genellikle Legendre'e kredi verilmesine karşın 1770 yılında Lambert tarafından kanıtlanmıştır. Daha önce tam sayı değerli, tam sayı değişkenli fonksiyonlar ile ilgili basit bir sonucu görelim.

Yardımcı Teorem. $\mathbb{Z}$ tam sayılar olmak üzere $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu $\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$ koşulunu sağlarsa, f bir yerden sonra sıfır sabit değerini alacaktır.

Kanıt. $n \to \infty$ iken $f(n) \to 0$ verildiğinden, $n \geq N_0$ için $|f(n) - 0| < \frac{1}{2}$ eşitsizliği sağlayacak N_0 tam sayısını (limit tanımından) bulabilirsiniz. $f(n) \in \mathbb{Z}$ olduğundan $n \geq N_0$ için $f(n) = 0$ olmalıdır. □

Teorem. π sayısı kesirli bir gerçel sayı değildir.

Kanıt. Her n pozitif tamsayı ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için I_n

$$I_n = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \cos(\alpha x)\, dx$$

ile tanımlansın. İntegralleri alarak $2 \leq n$ için

$$\alpha^2 I_n = 2n(n-1)I_{n-1} - 4n(n-1)I_{n-2} \qquad (5)$$

eşitliğinin sağlandığını görürüz.

P ve Q α 'nın dereceleri $2n + 1$ den küçük, tamsayı katsayılı polinomları olmak üzere, n üzerinden tümevarımla

$$\alpha^{2n+1} I_n = n!(P\sin(\alpha) + Q\cos(\alpha)) \qquad (6)$$

eşitliğini elde ederiz.[1]

Olmayana ergi metodunu kullanalım. Yani π kesirli bir sayı olsun. Böylece $\pi = \frac{a}{b}, b \neq 0$ olacak a, b tamsayıları bulabiliriz. (2) denkleminde α sayısı $\pi/2$ alınırsa, $J_n = \frac{b^{2n+1}}{n!} I_n$ ile

[1] $n!$ çarpanı (1) numaralı denklemdeki $n(n-1)$ den gelmektedir.

tanımlanan J_n bir tamsayıdır. I_n nin değeri yerine konarak

$$J_n = \frac{b^{2n+1}}{n!}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx \qquad (7)$$

elde edilir. Integral içindeki fonksiyon x 'in $(-1,1)$ aralığındaki değerleri için pozitif olduğundan, her n için $0 < J_n$ bulunur. Dolayısı ile, her n için, $J_n \neq 0$ buluruz. Neden? (3)'de her iki tarafın mutlak değeri alınır ve

$$C = \int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx$$

olarak tanımlanırsa

$$|J_n| \leq \frac{|b|^{2n+1}}{n!}\int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx \leq C\frac{|b|^{2n+1}}{n!}$$

bulunur. Buradan $n \to \infty$ iken $J_n \to 0$ elde edilir. Yardımcı Teorem bir N_0 tamsayısından sonra $J_n = 0$ verir ki bu yukarıdaki, her n için, $0 < J_n$ ile çelişir. Bu çelişki π sayısının kesirli bir sayı olması varsayımı ile elde edildiğinden teorem kanıtlanmıştır. □

Katsayıları tamsayı olan bir polinomun kökü olan sayılara cebirsel sayılar denir. π sayısının önemli bir özelliği de cebirsel bir sayı olmamasıdır. 1794'de Legendre tarafından kanıtlanan π^2 nin de kesirli bir sayı olmadığı, Hermite'in 1882 π 'nin cebirsel bir sayı olmadığını kanıtladığı teoremleri için [3]'ü önereriz.

KAYNAKÇA

[1] Taner, T: Gerçel Sayı Nedir?, *Matematik Dünyası*, **1**, Sayı 2, 2-5 (1991).

[2] Demir, H.: Dörtgenleri Tanıyalım I, *Matematik Dünyası*, **3**, Sayı 1, 1-5 (1993).

[3] Stewart, I.: *Galois Theory*, Chapman and Hall, London 1973.

Sayın Şafak Alpay,

Cumhuriyet Gazetesi'nin eki olan BİLİM TEKNİK Dergisi'nin 5 Haziran 1993 tarihli ve 324. sayısındaki "Matematikte Macaristan'ın Başarısı ve Türkiye" yazınızı ilgiyle okudum.

Yazının sonlarında "... Matematik ve Tabiat Bilimleri Dergisi ve bu dergiyi çıkaran Nuri KUTULMUŞ..." denilmektedir.

Bu yazınızla hatıralarım tazelendiğinden 1 İkincikânun (Ocak) 1945'te yayımlanan 1. sayısında derginin adının "Matematik ve Tabii İlimler Mecmuası" (ki 2. sayıdan itibaren yazdığınız gibidir), çıkaranın (sahibinin) adının ise "M. Nuri KUTULMUŞ" olduğunu; ayrıca "Fiyatı 30 Kuruş" olan bu derginin Nazım TERZİOĞLU'ndan önceki Yazı İşleri Müdürü'nün ilk 4 sayı için "Mehmet GÖKYAY" olduğunu bildirmek istiyorum.

Yine o döneme ait olarak Adnan ERGENELİ, Feyyaz GÜRSAN, Turan TANIN tarafından çıkartılan ve ilk sayısı 20 Eylül 1944 tarihinde yayımlanan "MATEMATİK-FİZİK-KİMYA" dergisini de burada anmak yerinde olur.

Bendeki bilgiye göre bu tür dergilerden bunları izleyeni Süleyman ÖLÇEN, İsmail GÖKMEN, Seyfettin AYDIN, Halid TULTAY tarafından kurulan ve ilk sayısı 1965 Ekiminde yayımlanan "Matematik Öğretimi Dergisi"dir.

Bu bilgileri, editörlüğünü yürüttüğünüz Matematik Dünyası'nın bir abonesi olma yakınlığı nedeniyle sunuyorum.

Saygılarımla
Güngör BİNGÖL

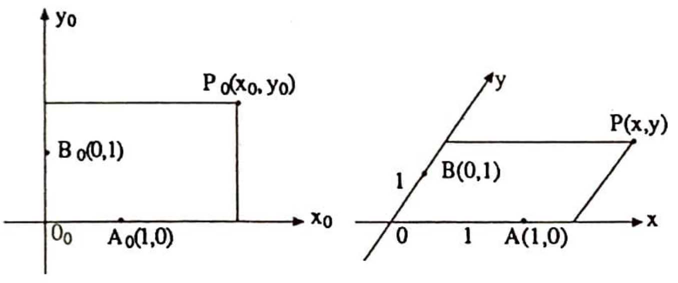
İLGİN DÜZLEM GEOMETRİ (III)

Hüseyin Demir *

III. İlgin Düzlemde Analitik Geometri

İlgin bir teoremin geometrik bir ispatını veremediğimizde ya da bir problemin çözümünü geometrik olarak bulamadığımızda yahut istek üzerine doğrudan analitik geometriye başvururuz.

İlgin bir Oxy koordinat sistemi, Öklid düzlemindeki bir $O_0x_0y_0$ koordinat sisteminden ilgin dönüşümle elde edilir (Şekil 29).

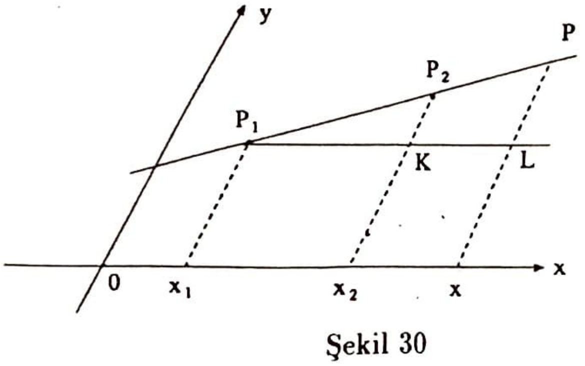


Şekil 29

Eksenler üzerinde birim uzunlukları veren $A(1,0), B(0,1)$ noktaları keyfi olarak seçilebilir.

Doğru Denklemi

$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ gibi farklı iki noktadan geçen doğrunun eğimi ve denklemi, Öklit düzleminde olduğu gibi tanımlanır ve elde edilir.



Şekil 30

Eğimi şöyle tanımlarız:

$$m(P_1P_2) = \frac{\text{ordinatlar farkı}}{\text{apsisler farkı}}$$

$$\Rightarrow m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Buna göre P_1P_2 nin denklemi

$$y - y_1 = m(y - y_1) \tag{8}$$

olur.

Bu da doğruların genel denklemi olarak

$$ax + by + c = 0 \tag{9}$$

eşitliğini verir.

$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ den geçen doğrunun denkleminin determinant biçimi şudur:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

Gerçekten, $x = x_i$, $y = y_i$ $(i = 1, 2)$ alındığında eşitlik sağlanır ve determinantın, birinci satıra göre açıldığında, (3) biçiminde olduğu görülür.

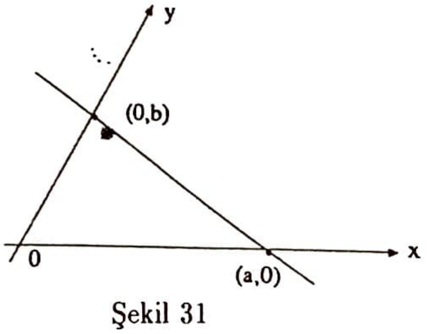
Sonuç. d ve d', eğimleri m, m' olan farklı iki doğru ise $d // d' \Leftrightarrow m = m'$ geçerlidir.

İlgin düzlemde diklik kavramı yer almadığından $mm' = -1$ eşitliği diklik diye bir şey ifade etmez.

(4)'te $P_1(a, 0), P_2(0, b)$ alındığında P_1P_2 nin denklemi olarak

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{11}$$

elde edilir.



Şekil 31

* ODTÜ Matematik Bölümü emekli öğretim üyesi

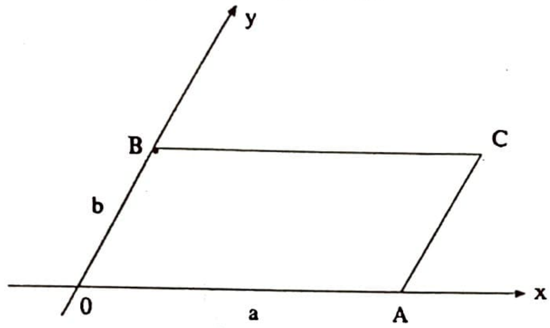
Üçgenlerin Alanları

İki hale ayıracağız:

a) Köşelerinin koordinatları verilen üçgenin alanı. İlgin koordinat sisteminde $O(0,0)$ $A(a,0)$ $C(a,b)$ $B(0,b)$ paralelkenarının alanını (Şekil 32)

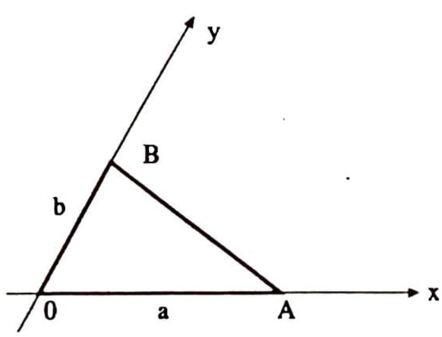
$$|OACB| = ab \tag{12}$$

olarak tanımlıyoruz. Bu, Öklit koordinat sistemide dikdörtgenin alanını verir.

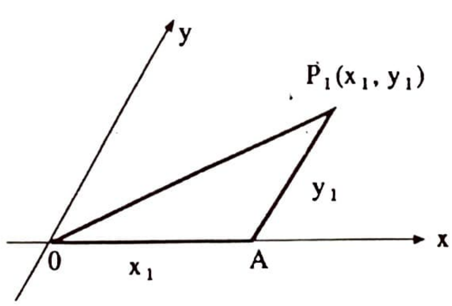


Şekil 32

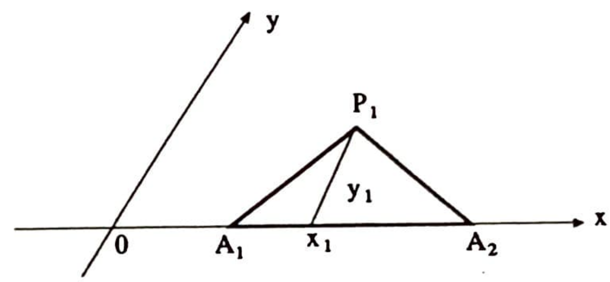
Bir $P_1(x_1,y_1)P_2(x_2,y_2), P_3(x_3,y_3)$ üçgeninin alanını elde etmek üzere aşağıdaki şekillerde özel korunumlu koyu çizilmiş üçgenlerin alanları yanlarına yazılmıştır:



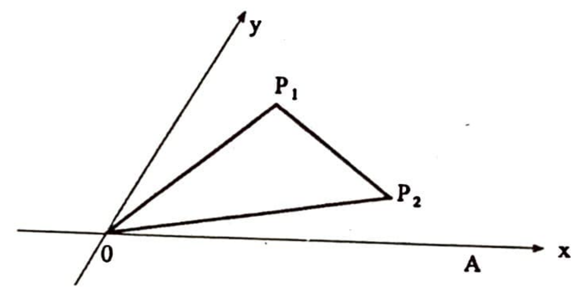
Şekil 33, alan $= \frac{1}{2}ab$



Şekil 34, alan $= \frac{1}{2}x_1y_1$

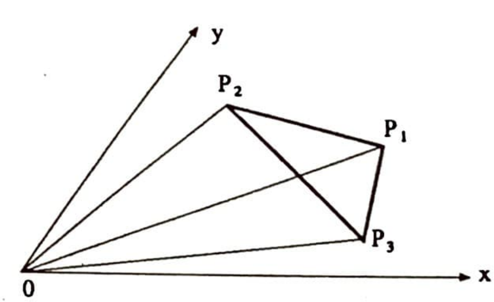


Şekil 35, alan $= \frac{1}{2}(a_2-a_1)y_1$



Şekil 36,
alan $|P_1OA| - |P_2OA| = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$

Genel halde (Şekil 37)



Şekil 37

$$\begin{aligned} |P_1P_2P_3| &= |P_1P_2O| + |P_1OP_3| - |P_2OP_3| \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{1}{2}(x_1y_3 - x_3y_1) \\ &\quad -\frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_1) \end{aligned}$$

olup

$$|P_1P_2P_3| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{13}$$

elde edilir.

Sonuç. Determinant sıfır olduğunda P_1, P_2, P_3 noktaları doğrudaştır.

b) Kenarlarına denklemleri verilen üçgenin alanı. Derginizde, ikişer ikişer kesişen ve denklemleri

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} &= 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} &= 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33} &= 0 \end{aligned}$$

olan d_1, d_2, d_3 gibi üç doğrunun oluşturduğu $d_1d_2d_3$ tam üçgeninin $|d_1d_2d_3|$ alanının hesaplanması sorulmuş (Matematik Dünyası, Cilt 2, Sayı 3, s.23, Y38) ve cevabın

$$|d_1d_2d_3| = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}^2}{A_{13}A_{23}A_{33}} \qquad (14)$$

olduğu ispatlanmıştır (Matematik Dünyası, Cilt 2, Sayı 5, s.31). Burada A_{13}, A_{23}, A_{33}, kofaktörlerdir.

Sonuç. (7)'de verilen determinant sıfır olduğunda d_1, d_2, d_3 doğruları noktadaştır.

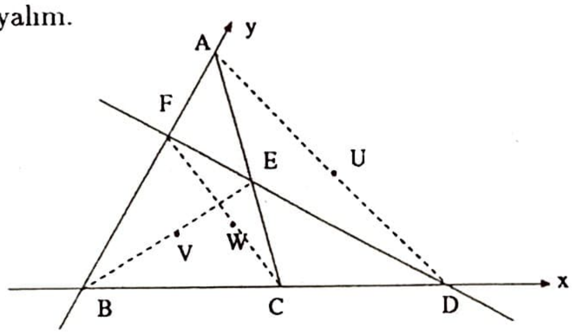
Şimdi bu iki sonucun bazı uygulamalarını verelim.

Teorem. (Newton doğrusu). Bir tam dörtgende köşegenlerin orta noktaları doğrudaştır.

Bir ABC üçgeni ile bir DEF keseninden oluşan bir dörtgeni koordinat sistemine Şekil 38'deki gibi yerleştirerek

$B(0,0)$, $C(2c,0)$, $D(2d,0)$, $A(0,2a)$, $F(0,2f)$

koyalım.



Şekil 38

E nin koordinatlarını bulmak üzere (5)'i kullanarak AC, DF nin

$$\frac{x}{2c} + \frac{y}{2a} = 1 \;\Rightarrow\; ax + cy = 2ac$$
$$\frac{x}{2d} + \frac{y}{2f} = 1 \;\Rightarrow\; fx + dy = 2df$$

bulup denklemlerini ortak çözelim.

$$E\left(2cd\frac{a-f}{ad-cf},\; 2af\frac{d-c}{ad-cf}\right)$$

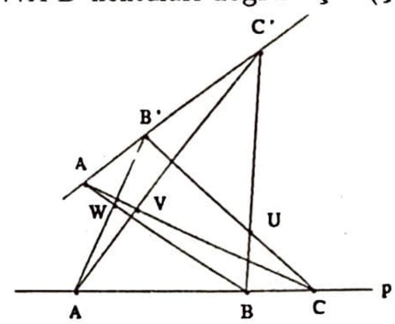
bulunur ve (6)'dan hesaplar sonucu

$$\begin{vmatrix} d & a & 1 \\ c & f & 1 \\ cd\frac{a-f}{ac-cf} & af\frac{d-c}{ad-cf} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

elde edilir.

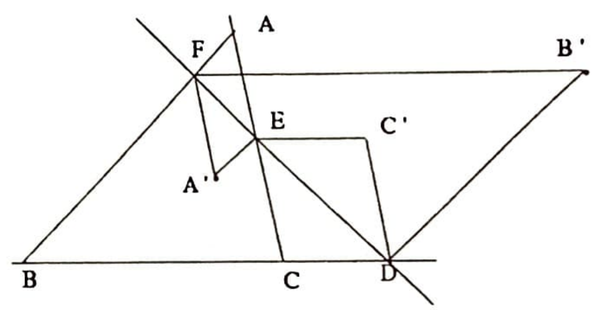
Meraklı okurlara şu iki teoremin analitik ispatlarını vermelerini öneriyoruz.

Teorem. (Pappus). p, p' gibi iki doğru üzerinde A, B, C ve A', B', C' noktaları bu sıralamalarla alındığında $BC' \cap B'C, CA' \cap C'A, AB' \cap A'B$ noktaları doğrudaştır (Şekil 39).



Şekil 39

Teorem. DEF doğrusu bir ABC üçgeninin bir keseni (Şekil 40) ve $AEA'F, BFB'D, CDC'E$ birer paralelkenar ise A', B', C' doğrudaştır.

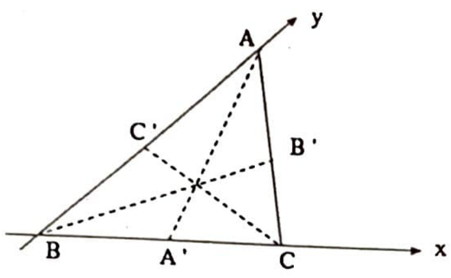


Şekil 40

Şimdi doğruların noktadaşlığına ilişkin iki örnek verelim.

Teorem. Bir üçgende kenarortaylar noktadaştır.

Üçgen ABC olsun ve BC doğrusu x ekseni, BA doğrusu ise y ekseni seçilsin.



Şekil 41

$A(0,2a)$, $B(c,a)$, $C(2c,0)$ koyup $A'(c,0)$, $B'(c,a)$, $C'(0,a)$ elde edilir.

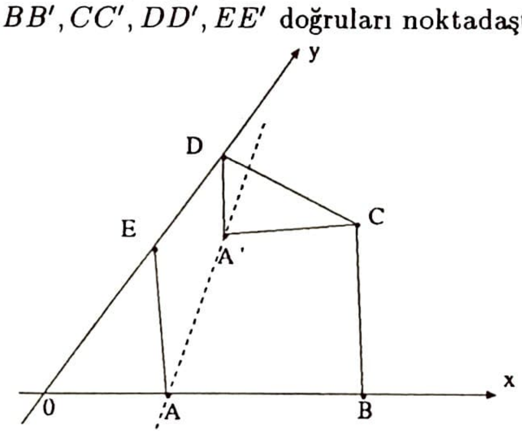
Kenarortayların denklemleri olarak şunları buluruz:

$$AA' : \frac{x}{c} + \frac{y}{2a} = 1 \quad \Rightarrow \quad 2ax + cy - 2ac = 0$$
$$BB' : \frac{y}{x} = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad ax - cy = 0$$
$$CC' : \frac{x}{2c} + \frac{y}{d} = 1 \quad \Rightarrow \quad ax + 2cy - 2ac = 0$$

Bunlara da (7) uygulanırsa determinantın sıfır olduğu görülür:

$$\begin{vmatrix} 2a & c & -2ac \\ a & -c & 0 \\ a & 2c & -2ac \end{vmatrix} = 0.$$

Teorem. Bir $ABCDE$ beşgeninde A köşesinden geçen AB, AC doğrularına, A nın karşı $[CD]$ kenarının C, D uçlarından çizilen paralel doğrular bir A' noktasında kesişsinler ($A'C//AB, A'D//AE$). Benzer çizimlerle B', C', D', E' noktaları bulunursa AA', BB', CC', DD', EE' doğruları noktadaştır.



Şekil 42

Konikler.

Konikler ikinci dereceden eğriler olup genel denklemleri

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (15)$$

biçimindedir.

İlk üç katsayıdan en az biri sıfırdan farklıdır ve koniğin türü dış koinvariant denilen

$$\Delta = B^2 - AC \quad (16)$$

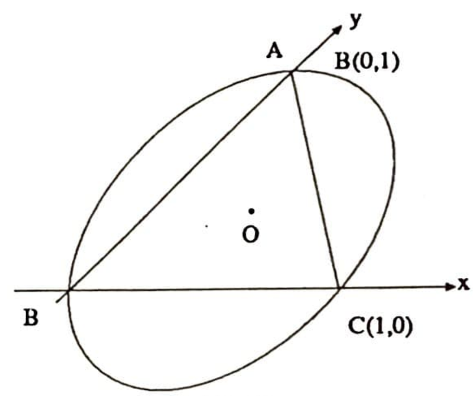
sayısının işaretiyle belirlidir. Δ 'nın negatif sıfır ya da pozitif olması halinde konik elips, parabol ya da hiperboldür.

Konumuzu bir problemle kapatıyoruz.

Problem. Bir üçgenin çevrel elipslerinin merkezlerinin geometrik yerini bulunuz.

Bu geometrik yeri tahmin etmek oldukça zordur. Çözüme ancak analitik olarak ulaşabiliriz.

Üçgenin köşeleri $A(0,1), B(0,0), C(1,0)$ olarak alındığında (Şekil 43), elips (0, 0), (1, 0),



Şekil 43

(0, 1) noktalarından geçtiğinden

$$F = 0,\ A + 2D = 0,\ C + 2E = 0$$

elde edilir ve (8) denklemi

$$f(x,y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - Ax - Cy = 0 \quad (8')$$

denklemine dönüşür.

Elipsin $O(x_0, y_0)$ merkezi

$$\begin{aligned} f_x &= 2Ax + 2By - A = 0 \\ f_y &= 2Bx + 2Cy - C = 0 \end{aligned}$$

denklem sistemini sağlar. Sistem çözüldüğünde

$$\begin{aligned} 2\Delta x_0 &= BC - AC \\ 2\Delta y_0 &= BA - AC \end{aligned}$$

elde edilir. AC yerine (9)'dan $B^2 - \Delta$ yazıldığında

$$\begin{aligned} (2x_0 - 1)\Delta &= BC - B^2 \\ (2y_0 - 1)\Delta &= BA - B^2 \end{aligned}$$

bulunur.

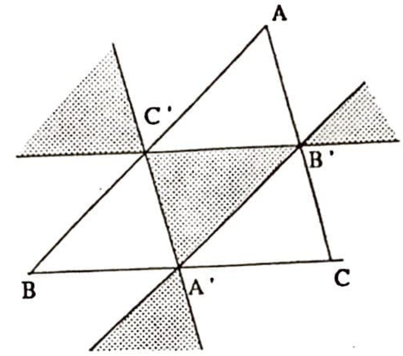
Bunlarda B^2 yi sola geçirerek elde edilen eşitlikler taraf tarafa çarpıldığında ve $AC \equiv B^2 - \Delta$ kullanıldığında kısaltmalardan sonra

$$(2x_0 - 1)(2y_0 - 1)\Delta + (2x_0 + 2y_0 - 1)B^2 = 0$$

$$\Rightarrow (2x_0 - 1)(2y_0 - 1)(2x_0 + 2y_0 - 1) + (2x_0 + 2y_0 - 1)^2(B^2/\Delta) = 0$$

$$\Rightarrow (2x_0 - 1)(2y_0 - 1)(2x_0 + 2y_0 - 1) = -(2x_0 + 2y_0 - 1)(B^2/\Delta) \geq 0$$

elde edilir. Bu eşitsizlik ise ABC nin $A'B'C'$ orta tam üçgeni ile ilgili taralı bölgeyi verir.



Şekil 44

EISENSTEIN KRİTERİ

Mefharet Alpseymen Kocatepe *

Bir polinomu çarpanlarına ayırmak veya çarpanlara ayrılamayacağını göstermek çoğunlukla zordur ve zaman alır. Bir polinomun ne zaman çarpanlara ayrılabileceğini veya ne zaman ayrılamayacağını söyleyen kriterlerin sayısı çok azdır. Bunlardan bir tanesi de ünlü Eisenstein kriteridir.

İsterseniz önce kısaca Eisenstein'dan sözedelim. Ferdinand Gotthold Max Eisenstein 1823-1852 yılları arasında yaşamıştır. Sayılar teorisi, cebir ve eliptik fonksiyonlar üzerinde önemli çalışmalar yapmıştır. Şimdi sözünü edeceğimiz kriteri 1850 yılında bulmuştur.

Şimdi de notasyonu ve terminolojiyi belirleyelim. $\mathbb{Z}[x]$ ile katsayıları $\mathbb{Z}$ kümesinde olan (yani tamsayılar olan) tüm polinomları gösterelim. Aynı şekilde $\mathbb{Q}[x]$ ile katsayıları rasyonel sayılar olan tüm polinomları gösterelim. Eğer $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinomu herbirinin derecesi en az 1 olan ve katsayıları tamsayı olan iki polinomun çarpımı şeklinde yazılabiliyorsa $f(x)$ polinomu $\mathbb{Z}[x]$ içinde *indirgenebilir*, aksi halde *indirgenemez* denir. Aynı tanım $\mathbb{Q}[x]$ için de verilebilir. Ayrıca $\mathbb{Z}[x] \subset \mathbb{Q}[x]$ olduğundan $\mathbb{Z}[x]$ in bir elemanının $\mathbb{Q}[x]$ içinde indirgenebilir veya indirgenemez olmasından da söz edilebilir.

Teorem (Eisenstein kriteri). p verilen bir asal sayı,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

olsun. Eğer $a_n \not\equiv 0 \; (\mathrm{mod}\, p)$,

$$a_{n-1} \equiv \cdots \equiv a_0 \equiv 0 \; (\mathrm{mod}\, p), \quad a_0 \not\equiv 0 \; (\mathrm{mod}\, p^2)$$

ise, $f(x)$ polinomu $\mathbb{Z}[x]$ içinde indirgenemez.

Not. Bu kriter aslında $f(x)$ in $\mathbb{Q}[x]$ içinde indirgenemeyeceğini söyler. Bunu kanıtlamak da zor değildir.

Kanıt. İddianın doğru olmadığını varsayalım. O zaman $b_i, c_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$f(x) = (b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0)(c_k x^k + \cdots + c_1 x + c_0)$$

şeklinde yazılabilir ($m \geq 1$, $k \geq 1$ ve $n = m + k$.) Katsayılara bakarak $a_0 = b_0 c_0$ olur. $a_0 \equiv 0 \; (\mathrm{mod}\, p)$ ve p asal olduğu için $b_0 \equiv 0 \; (\mathrm{mod}\, p)$ veya $c_0 \equiv 0 \; (\mathrm{mod}\, p)$ olmak zorundadır. $a_0 \not\equiv 0 \; (\mathrm{mod}\, p^2)$ olduğu için de bunların her ikisi birden doğru olamaz. Genelliği bozmadan $c_0 \equiv 0 \; (\mathrm{mod}\, p)$ ve $b_0 \not\equiv 0 \; (\mathrm{mod}\, p)$ olduğunu varsayalım. $a_n = b_m c_k \not\equiv 0 \; (\mathrm{mod}\, p)$ olduğu için $c_k \not\equiv 0 \; (\mathrm{mod}\, p)$ olmak zorundadır ve $c_j \not\equiv 0 \; (\mathrm{mod}\, p)$ özelliğini sağlayan j indislerinin en küçüğünden söz edebiliriz. Bu en küçük indisi

* Bilkent Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi

r ile gösterelim. $c_0 \equiv 0 \pmod p$ olduğundan, $1 \leq r$ ve

$$c_{r-1} \equiv \cdots \equiv c_0 \equiv 0 \pmod p$$

olur. Bu durumda

$$a_r = b_0 c_r + b_1 c_{r-1} + \cdots + b_r c_0 \equiv b_0 c_r \pmod p.$$

$b_0 \not\equiv 0 \pmod p$ ve $c_r \not\equiv 0 \pmod p$ olduğu için $a_r \not\equiv 0 \pmod p$ olmak zorundadır. Hipoteze göre bu koşulu sağlayan tek katsayı a_n olduğundan, $r = n$ bulunur. Buradan da

$$n = m + k > k \geq r = n$$

çelişkisi çıkar.

Örnekler. 1. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 2$. Burada $a_3 = 1$, $a_2 = 2$, $a_1 = 4, a_0 = 2$ dir. $p = 2$ asal sayısına göre

$$a_3 \not\equiv 0 \pmod p), \quad a_2 \equiv a_1 \equiv a_0 \equiv 0 \pmod p),$$

$$a_0 \not\equiv 0 \pmod{p^2}$$

olduğundan Eisenstein kriterini uygulayarak $f(x)$ polinomunun $\mathbb{Z}[x]$ içinde indirgenemeyeceğini buluruz.

2. $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$. Bu polinomun katsayıları 1,2,2,4 tür. 2,2,4 ü bölen tek asal sayı $p = 2$ dir. Ancak $4 \equiv 0 \pmod{p^2}$ olduğundan bu polinoma Eisenstein kriterini uygulayabilmemiz mümkün değildir. Ama tabii ki bu durum bu polinomun $\mathbb{Z}[x]$ içinde indirgenebileceği anlamına gelmez. Ancak deneyerek

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 2x^2 + 2x + 4 \\ &= x^2(x+2) + 2(x+2) \\ &= (x^2+2)(x+2) \end{aligned}$$

bulunduğundan $f(x)$ polinomu $\mathbb{Z}[x]$ içinde indirgenebilir.

3. $f(x) = x^7 - 47$. Burada katsayılar $1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -47$ olduğundan $\because p = 47$ asal sayısı ile kriterimizi uygulayabilir ve polinomun $\mathbb{Z}[x]$ içinde indirgenemez olduğunu görürüz.

4. $f(x) = x^4 + 15$. Burada da kriterimizi $p = 3$ veya $p = 5$ asal sayısı ile uygulayabiliriz.

5. p bir asal sayı olmak üzere

$$f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$$

olsun. Polinomun bu şekline Eisenstein kriterinin uygulanamayacağı açıkça görülür. Ancak $f(x) = \dfrac{x^p - 1}{x - 1}$ olduğunu gözleyerek ve $x = y + 1$ tanımlayarak

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(y+1)^p - 1}{y} \\ &= \frac{1}{y}\left\{\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} y^{p-j} - 1\right\} \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j} y^{p-1-j} \\ &= y^{p-1} + py^{p-2} + \frac{p(p-1)}{2} y^{p-3} \\ &\quad + \cdots + p \\ &\overset{\text{tanım}}{=} g(y) \end{aligned}$$

$g(y)$'nin ilki hariç bütün katsayıları p asal sayısı ile bölünebilir. Bunun nedenini görmek için bu katsayıların herbirinin payında p çarpanı olduğunu ve paydasındaki sayıların da p den küçük tamsayıların çarpımı olduğunu ve dolayısıyla p ile sadeleşemeyeceğini gözlemek yeterlidir. $g(y)$ polinomunun Eisenstein kriterinin diğer koşullarını sağladığı açıkça görüldüğünden, $g(y)$ polinomu $\mathbb{Z}[y]$ içinde indirgenemez. Buradan da $f(x)$ in indirgenemediği çıkar. Aksi olsaydı, yani $f(x) = f_1(x) f_2(x)$ şeklinde yazılabilseydi,

$$g(y) = f(x+1) = f_1(x+1) f_2(x+1) = f_1(y) f_2(y)$$

olacağından $g(y)$ indirgenebilecekti.

Bu kriterin bir de genelleştirilmiş bir şekli vardır. Şimdi d ondan söz edelim.

Teorem (Genelleştirilmiş Eisenstein kriteri). $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ olsun. Bir p asal sayısı ve $\ell < n$ için,

$$a_n \not\equiv 0, \; a_\ell \not\equiv 0, \; a_{\ell-1} \equiv \cdots \equiv a_0 \equiv 0 \pmod p$$

$$a_0 \not\equiv 0 \pmod{p^2}$$

ise $\mathbb{Z}[x]$ içinde, $f(x)$ indirgenemez veya $f(x)$ in derecesi en az ℓ olan ve indirgenemeyen bir çarpanı vardır.

Kanıt. $f(x)$ indirgenebilirse, $m \geq 1$, $k \geq 1$ ve $b_i, c_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{(b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0)}_{g_1(x)} \\ &\quad \underbrace{(c_k x^k + \cdots + c_1 x + c_0)}_{f_1(x)} \\ &= g_1(x) f_1(x) \end{aligned}$$

olsun. Önceden olduğu gibi genelliği bozmadan, $b_0 \not\equiv 0 \pmod p$ ve $c_0 \equiv 0 \pmod p$ olsun.

$$c_1 b_0 + c_0 b_1 = a_1 \equiv 0 \pmod p$$

ve

$$b_0 \not\equiv 0 \pmod p, \quad c_0 \equiv 0 \pmod p$$

olduğundan $c_1 \equiv 0 \pmod p$ bulunur. Bu şekilde sırayla $a_2, \ldots, a_{\ell-1}$ i yazarak,

$$c_0 \equiv c_1 \equiv \cdots \equiv c_{\ell-1} \equiv 0 \pmod p$$

bulunur. Ayrıca $b_m c_k = a_n \not\equiv 0 \pmod p$ olduğundan,

$$c_k \not\equiv 0 \pmod p.$$

Böylece $k \leq \ell - 1$ olamayacağı hemen görülür. Demek ki $k \geq \ell$ olmak zorunda.

$k = \ell$ olursa kriterin ilk şekli $f_1(x)$'e uygulanabilir ve $f_1(x)$ in indirgenemez olduğu görülür (derece $f_1(x) = \ell$).

$k > \ell$ ise

$$a_\ell = c_\ell b_0 + c_{\ell-1} b_1 + \cdots \equiv c_\ell b_0 \pmod p$$

ve $a_\ell \not\equiv 0 (\bmod p)$ olduğu için $c_\ell \not\equiv 0 (\bmod p)$ bulunur. Bu durumda $f_1(x) = c_k x^k + \cdots + c_1 x + c_0$ olup $k > \ell$ için,

$$c_k \not\equiv 0, \; c_\ell \not\equiv 0, \; c_{\ell-1} \equiv \cdots \equiv c_0 \equiv 0 \pmod p,$$

$$c_0 \not\equiv 0 \pmod{p^2}$$

sağlandığından, şimdiye kadar $f(x)$ için yaptıklarımızı $f_1(x)$ için yapabiliriz. $f_1(x)$ indirgenemez ise teorem kanıtlanmış olur, indirgenebilirse $f_2(x)$ şekil olarak $f_1(x)$ ve $f(x)$ e benzemek üzere

$$f_1(x) = g_2(x) f_2(x)$$

olarak yazabiliriz ve bu süreci devam ettiririz. Ancak

$$\begin{aligned} \ell &\leq \text{derece} f_i(x) < \text{derece} f_{i-1}(x) \\ &< \cdots < \text{derece} f_1(x) \end{aligned}$$

olduğundan, bu süreç bir yerde bitmek zorundadır. j'nci adımda biterse

$$\begin{aligned} f(x) &= g_1(x) f_1(x) = g_1(x) g_2(x) f_2(x) \\ &= \cdots = g_1(x) g_2(x) \cdots g_j(x) f_j(x) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Burada $f_j(x)$ indirgenemez ve derecesi de en az ℓ dir.

Örnek. 1993 Uluslararası Matematik Olimpiyatı, birinci sorusunu hatırlayalım. Bu yazımızdaki terminolojiyle ifade edersek bu soruda $n > 1$ iken $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ polinomunun $\mathbb{Z}[x]$ içinde indirgenemeyeceğini göstermemiz isteniyordu. Eisenstein kriterinin ilk şekli bu soruya uygulanamaz, fakat genelleştirilmiş şekli uygulanabilir. $p = 3$ asal sayısı ve $\ell = n - 1$ sayısı için teoremin hipotezi sağlanır. Teoreme göre $f(x)$ indirgenemez veya derecesi en az $n - 1$ olan indirgenemeyen bir $g(x)$ çarpanı vardır. $g(x)$ in derecesi n ise $g(x) = f(x)$ olmak zorundadır. $g(x)$ in derecesi $n - 1$ ise $f(x)$ in aynı zamanda derecesi 1 olan bir çarpanı, yani rasyonel bir kökü vardır. Bu rasyonel kök $\frac{\mp 3}{\mp 1} = \mp 3$ olmak zorundadır. Fakat $f(3) \neq 0$ ve $f(-3) \neq 0$ olduğu kolayca görüldüğünden, $f(x)$ in derecesi $n - 1$ olan ve indirgenemeyen çarpanı yoktur. Bu durumda geriye bir tek seçenek kalmaktadır. O da $f(x)$ in indirgenemez olduğudur.

MOSKOVA BAĞIMSIZ ÜNİVERSİTESİ GİRİŞ SINAVI

Derleyen: Şafak Alpay *

Ünlü Moskova Devlet Üniversitesi'nin işlevini yerine getiremediği düşüncesi ile bazı Moskovalı matemaktiçiler Bağımsız Moskova Üniversitesi'ne bağlı olarak kurulan Matematik Koleji ile gelecekteki araştırmacıları yetiştirmek için yeni bir okul kurdular. Kurucuları V.I. Arnold ve N.N. Konstantinov olan okul aşağıda sorularını verdiğimiz sınavla Eylül 1991'de sayıları 45 olan ilk öğrencilerini seçti. Haziran 1991 tarihinde yapılan sınav 120 üzerinden değerlendirildi.

Giriş Sınavı

1. Gerçel x ve y için $f(x)-f(y) \leq (x-y)^2$ eşitsizliğini sağlayan tüm f fonksiyonlarını bulunuz.

2. $x^{2n}-2x^{2n-1}+3x^{2n-2}\cdots\cdots 2nx+2n+1$ çokterimlisinin gerçel kökü olmadığını gösteriniz.

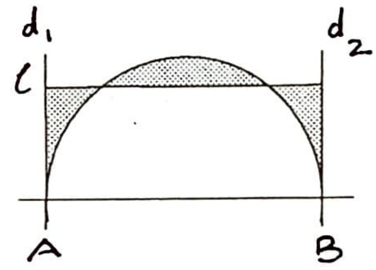
3. $2^{2^n}+2^{2^{n-1}}+1$ sayısının asal çarpanlarının sayısının n 'den küçük olmadığını gösteriniz. (Asal çarpanlar farklı olmayabilir.)

4. Düzgün bir tetrahedronun içine ve dışına çizilen kürelerin hacimlerinin oranını bulunuz.

5. Bir ABC üçgeninin tüm açılarının dar açı olması için gerekli ve yeterli koşulun, AB, AC ve BC kenarları üzerinde AA', BB' ve CC''nin eşit uzunlukta olduğu A', B' ve C' noktalarının varlığı olduğunu kanıtlayınız.

6. $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_{100}$ dizisi $1, 2, \cdots, 100$ sayılarının bir permütasyonu olsun. $1\cdot a_1 + 2\cdot a_2 + \cdots + 100\cdot a_{100}$ toplamının minimum değerinin $100, 99, \ldots, 1$ permütasyonu için alındığını gösteriniz.

7. Şekilde,, AB verilen dairenin yarıçapı, d_1 ve d_2, A ve B noktalarında çizilen teğetler ise taralı alanın minimum olacağı ℓ doğrusunu bulunuz.



8. L_1 ve L_2, çevresi L olan dairenin içine ve dışına çizilen düzgün n-genlerin çevresi olsun. S dairenin, S_1, S_2 çokgenlerin alanları ise

a) $L^2 < L_1 L_2$ ve

b) $S_1 S_2 < S^2$

olduğunu gösteriniz.

9. Bir üçgenin kenar uzunlukları oranının alabileceği sayılar neler olabilir?

10. Her alt dizisinin periyodik olmayan bir aritmetik altdizisi olan, 0 ve 1'lerden oluşmuş bir dizi var mıdır?

---

* ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

PROBLEMLER

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A4.1. A açısı, U yarıçevresi ve $[BC]$ kenarının doğrultusu verilen ABC üçgenini pergel ve cetvelle çiziniz. (*Hüseyin Demir*)

A4.2. $\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\sum_{p=1}^{n-1}p^{n-k} = n^n - n \ (n \geq 2)$ olduğunu gösteriniz. (*Dinçer Akay*)

A4.3. Bir $ABCD$ dörtgeninde köşegenlerin orta noktaları X,Y, ve $AB \cap CD = F$ ise, alan$(FXY) = \frac{1}{4}$alan$(ABCD)$ olduğunu gösteriniz. (*Ayhan Aziz*)

A4.4. Bir üçgende içaçıların kotanjantları aritmetik dizi oluştururlarsa, kenar uzunluklarının karelerinin de aritmetik dizi oluşturduklarını gösteriniz. (*Hasan Kullap*)

A4.5. $f(x) = \sqrt{(x-1)^2+9} + \sqrt{(x-8)^2+16}$ fonksiyonunun minimum değerini bulunuz. (*Moskova Bağımsız Üniversitesi, 1991 Giriş Sınavı*)

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y4.1. $[AA']$ ve $[BB']$, O merkezli birim çemberin birbirine dik iki çapıdır. B' noktasından geçen değişken bir doğru, $[OA]$'yı U'da ve AB yayını P'de keserse, OUP üçgeninin alanının alabileceği en büyük değerin $\frac{1}{4}\sqrt{10\sqrt{5}-12}$ olduğunu gösteriniz. (*Hüseyin Demir*)

Y4.2. Elemanları 0 veya 1 olan, her satırında ve her sütununda en az bir 0 ve en az bir 1 bulunan kaç tane farklı $n \times n$ $(n \geq 2)$ matris bulunabilir?

Y4.3. Dış r_a, r_b, r_c yarıçapları verilen bir üçgenin pergel ve cetvelle çizilebileceğini gösteriniz. (*Hüseyin Demir*)

Y4.4. Köşegenlerinin kesişme noktası K olan bir $ABCD$ dörtgeninde, CAB, DAB ve KAB üçgenlerinin iç teğet çemberleri AB'ye sırasıyla T_1, T_2 ve T noktalarında değsinler. r_1 ve r_2, KBC ve KDA üçgenlerinin iç teğet çemberlerinin yarıçapları ise,

$$r_1 \leq r_2 \Longleftrightarrow |TT_1| \leq |TT_2|$$

olduğunu gösteriniz. (*Hüseyin Demir*)

Y4.5.

$$\begin{vmatrix} d_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & d_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & d_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & d_{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & d_n \end{vmatrix}$$

determinantını hesaplayınız.

EĞLENCELİK

$$\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 68 & 55 \\ 44 & 35 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 55 \\ 44 & 68 \end{bmatrix}$$

Hakan Avcı

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 36 \\ 36 & 36 \end{bmatrix}$$

(Bu özelliğe sahip başka 2 × 2 matris çifti yok!!!)

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 43 \\ 55 & 68 \end{bmatrix}$$

Hüseyin Demir

ÇÖZÜMLER

Değerlendiren: Cem TEZER *

A66. Bir elips üzerinde alınan değişken bir X noktasından elipsin büyük ve küçük eksenlerine çizilen paralellerin elipsi X haricinde kestikleri noktaları birleştiren kirişle, X ten elipse çizilen normalin kesiştiği noktanın geometrik yeri nedir?

Çözüm. Sözkonusu elipsi $a > b > 0$ olmak üzere

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

denklemi ile gösterelim. X in koordinatları (x_0, y_0) olsun. Büyük ve küçük eksenlere çizilen paraleller elipsi $Y(-x_0, y_0)$, $Z(x_0, -y_0)$ noktalarında keserler. YZ doğrusunun denklemi

$$y = -\frac{y_0}{x_0}x$$

X den elipse çizilen normalin denklemi de

$$y - y_0 = \frac{a^2}{b^2}\frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$$

olup, küçük bir hesapla bu doğruların

$$\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}x_0, -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}y_0\right)$$

noktasında kesiştiği görülebilir. Demek ki geometrik yer, elimizdeki elipsle merkezdeş ve bütün boyutları $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)^{-1}$ oranında küçültülmüş bir elipstir.

(**Çözenler:** Almas Rımov, Ruhi Tabur, Atasağun Baysal, Ercan Şahin, Hasan Kullap, Alaattin Aktaş.)

A67. Bir $ABCD$ teğetler dörtgeninde, ABC, BCD, CDA, DAB üçgenlerinin içteğet çemberlerinin AB ve BC, BC ve CD, CD ve DA, DA ve AB kenarlarına değme noktaları sırasıyla A_2 ve B_1, B_2 ve C_1, C_2 ve D_1, D_2 ve A_1 olsun.

$$|A_1A_2| = |B_1B_2| = |C_1C_2| = |D_1D_2|$$

olduğunu gösteriniz. (*Hüseyin DEMİR*)

Çözüm. $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, $e = |AC|$, $f = |BD|$, $g = (a+c)/2 = (b+d)/2$ (Neden ?) $h = (e+f)/2$ yazalım.

$$|AA_1| = \frac{a+d-f}{2}$$

$$|A_2B| = \frac{a+b-e}{2}$$

olup,

$$\begin{aligned} |A_1A_2| &= |AB| - |AA_1| - |A_2B| \\ &= a - \frac{a+d-f}{2} - \frac{a+b-e}{2} \\ &= h - g \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$|A_1A_2| = |B_1B_2| = |C_1C_2| = |D_1D_2| = h - g$$

dir.

(**Çözenler:** Ali Tombak, Metin Bekil, Almas Rımov, Ruhi Tabur, Atasağun Baysal, Murat Hikmet Beybağa, Alaattin Aktaş, Bayram Yenikaya, Turgay Uçkun.)

A68. Bir ABC üçgeninde $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ olsun. İçteğet çember merkezinin A, B, C köşelerine uzaklıklarını sırasıyla x, y, z ile, çevrel çember merkezinin BC, CA, AB kenarlarına uzaklıklarını sırasıyla k, l, ve m ile, içteğet çember yarıçapını da r ile gösterelim. $2s = a + b + c$ ise,

$$4\left(\frac{a}{k} + \frac{b}{l} + \frac{c}{m}\right) = \frac{xyzs}{klmr}$$

olduğunu gösteriniz. (*Hasan KULLAP*)

Çözüm. Önce, verilen gösterimlerin haricinde üçgenin çevrel çember yarıçapı için R, üçgenin alanı için de Δ yazarak,

$$\begin{aligned} r &= x\sin\left(\frac{A}{2}\right) = y\sin\left(\frac{B}{2}\right) = z\sin\left(\frac{C}{2}\right) \\ k &= R\cos A \\ l &= R\cos B \\ m &= R\cos C \end{aligned}$$

*ODTÜ Matematik Bölümü öğretim üyesi

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

ve

$$\Delta = sr = \frac{abc}{4R}$$

olduğunu hatırlayalım.

$$\begin{aligned} r &= \frac{\Delta}{s} = \frac{\frac{1}{2}bc\sin A}{\frac{1}{2}(a+b+c)} \\ &= \frac{4R^2 \sin A \sin B \sin C}{2R(\sin A + \sin B + \sin C)} \\ &= \frac{2R\sin A \sin B \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} \\ &= \frac{2R\sin A \sin B \sin C}{4\cos(A/2)\cos(B/2)\cos(C/2)} \text{ (Neden ?)} \\ &= 4R\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right) \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\frac{r}{4R} = \sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)$$

ve

$$\frac{xyzr}{4R} = r^3$$

bundan da

$$\frac{xyzr\Delta}{abc} = r^3$$

ve nihayet

$$xyzs = abcr$$

bulunur. Bundan da

$$\begin{aligned} \frac{xyzs}{klmr} &= \frac{abc}{klm} = 8\tan A \tan B \tan C \\ &= 8(\tan A + \tan B + \tan C) \\ &= 4\left(\frac{a}{k} + \frac{b}{l} + \frac{c}{m}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

(**Çözenler:** Ali Tombak, Metin Bekil, Almas Rımov, Atasağun Baysal, Ercan Şahin, Fatih Uzunoğlu, Bayram Yenikaya.)

A69. Köşegenleri içinde kesişen bir $ABCD$ dışbükey dörtgeninin bir kirişler dörtgeni olması için

$$det \begin{bmatrix} 0 & |AB| & |AC| & |AD| \\ -|BA| & 0 & |BC| & |BD| \\ -|CA| & -|CB| & 0 & |CD| \\ -|DA| & -|DB| & -|DC| & 0 \end{bmatrix} = 0$$

olmasının gerek ve yeter olduğunu gösteriniz. (*Hüseyin DEMİR*)

Çözüm. $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, $e = |AC|$, $f = |BD|$ ve

$$\Delta = det \begin{bmatrix} 0 & a & e & d \\ -a & 0 & b & f \\ -e & -b & 0 & c \\ -d & -f & -c & 0 \end{bmatrix}$$

yazarsak, sözkonusu matriste ikinci, üçüncü, dördüncü sütunlar sırasıyla c, $-f$, b ile çarpılıp dördüncü sütunda toplanarak,

$$b\Delta = det \begin{bmatrix} 0 & a & e & ac+bd-ef \\ -a & 0 & b & 0 \\ -e & -b & 0 & 0 \\ -d & -f & -c & 0 \end{bmatrix}$$

bu sefer de ikinci, üçüncü, dördüncü satırlar sırasıyla c, $-f$, b ile çarpılıp dördüncü satırda toplanarak,

$b^2\Delta = \det$

$$\begin{bmatrix} 0 & a & e & ac+bd-ef \\ -a & 0 & b & 0 \\ -e & -b & 0 & 0 \\ -(ac+bd-ef) & -0 & -0 & 0 \end{bmatrix}$$

$= b^2(ac+bd-ef)^2$

ve böylece

$$\Delta = (ac+bd-ef)^2$$

elde edilir ki bu bağıntı ve Batlamyus teoreminden $ABCD$ nin bir kirişler dörtgeni olması için gerek ve yeter şartın $\Delta = 0$ olduğu görülür.

(**Çözenler:** Ali Tombak, Metin Bekil, Almas Rımov, Ruhi Tabur, Atasağun Baysal, Murat Hikmet Beybağa.)

A70. İlki ikincisinin tamamen içinde kalan ve eşmerkezli olmayan α, β çemberleri verildiğinde, α ya dıştan, β ya içten teğet ve birbirine eşit olmayan herhangi iki çemberin dışhomoteti merkezinin α ve β nın kuvvet ekseni üzerinde kaldığını gösteriniz.

Çözüm. α ya dıştan, β ya içten teğet C ve C' çemberlerinin merkezlerini birleştiren doğru, α, β çemberlerinin kuvvet eksenini bir M noktasında kessin. (Kesmezse ?) M noktasının α ve β ya göre eşit olan kuvvetini evirtim kuvveti olarak, M noktasını da evirtim merkezi olarak almak suretiyle elde edilen evirtim, α ve β çemberlerinin her birini sabit bırakırken, C ve C' çemberlerini aralarında değiştirir. Demek ki M, C ve C' çemberlerinin dış (neden ?) homoteti merkezidir.

(**Çözenler:** Ali Tombak, Metin Bekil, Atasağun Baysal.)

Y66. Bir $ABCD$ teğetler dörtgeninde, içteğet çemberin AB, BC, CD, DA kenarlarına değdiği noktalar sırasıyla P, Q, R, S ise,

$$\frac{|AB||CD|}{|QS|^2} = \frac{|BC||DA|}{|PR|^2}$$

olduğunu ispat ediniz. (*Hüseyin DEMİR*)

Çözüm. $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, $p = |QS|$, $q = |PR|$ yazalım. AD, BC doğruları L noktasında, AB, CD doğruları da M noktasında kesişsin. (Kesişmezse ?) $\angle ALB = 2\lambda$, $\angle BMC = 2\mu$ olsun. ABC üçgenini $ABCD'$ paralelkenarına tamamlayıp, $DD'C$ ve $DD'A$ üçgenlerinde kosinüs teoreminden,

$$a^2+c^2-2ac\cos 2\mu = |DD'|^2 = b^2+d^2-2bd\cos 2\lambda$$

bundan da

$$(a+c)^2-2ac(1+\cos 2\mu) = (b+d)^2-2bd(1+\cos 2\lambda)$$

ve

$$a+c = b+d$$

kullanılarak,

$$ac\cos^2\mu = bd\cos^2\lambda \qquad (*)$$

elde edilir. İçteğet çember merkezi I, içteğet çember yarıçapı da r ile gösterilerek,

$$\cos\lambda = \cos(\angle IQS) = \frac{p}{2r}$$

ve benzer şekilde

$$\cos\mu = \frac{q}{2r}$$

bulunur ki, bunları (*)'la birleştirmek suretiyle,

$$\frac{ac}{p^2} = \frac{bd}{q^2}$$

elde edilir.

(**Çözenler:** Almas Rımov, Ruhi Tabur, Atasağun Baysal, Fatih Uzunoğlu, Alaattin Aktaş.)

Y67. Bir ABC üçgeninde BC, CA, AB kenarları üzerinde sırasıyla D, E, F noktaları alınsın. $AEDF$ bir paralelkenar ve

$$|DB| : |DC| = |AB|^2 : |AC|^2$$

ise $BCEF$ nin bir kirişler dörtgeni olduğunu gösteriniz. (*Hüseyin DEMİR*)

Çözüm. $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$, $e = |DE|$, $f = |DF|$ koyalım : FBD ve EDC üçgenlerinin benzerliğinden,

$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|BF|}{|DE|} = \frac{c-e}{e} = \frac{|FD|}{|EC|} = \frac{f}{b-f}$$

olup,

$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{c-e}{e}$$

den

$$e = \frac{b^2c}{b^2+c^2},$$

$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{f}{b-f}$$

den de

$$f = \frac{bc^2}{b^2+c^2}$$

elde edilir. O halde

$$|AE||AC| - |AF||AB| = fb - ec = 0$$

olup, B, C, E, F noktaları çemberdeştir.

(**Çözenler:** Almas R imov, Ruhi Tabur, Atasağun Baysal, Cengiz Yılmaz, Hasan Kullap, Yaşar Kandur, Burhan Biner, Murat Hikmet Beybağa, Bayram Yenikaya, Alaattin Aktaş, Turgay Uçkun.)

Y68.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right]\frac{x^n}{n!} = e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot n!}x^n$$

olduğunu gösteriniz. (*Necdet BATIR*)

Çözüm. Gözönüne alınan seriler, x in bütün değerleri için yakınsak, böylece de mutlak yakınsak olduğundan, yakınsaklık mütalaalarına bir daha temas etmeyeceğiz.

$$H = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^n}{n!}$$

yazalım. **Y50** den dolayı

$$\begin{aligned} H &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}\right]\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k.k!}\frac{1}{(n-k)!}\right)x^n \end{aligned}$$

olup $A_0 = 0$ ve $k = 1, 2, 3, \cdots$ için

$$A_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k.k!}$$

$k = 0, 1, 2, \cdots$ için de

$$B_k = \frac{1}{k!}$$

koyularak

$$H = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}\right)x^n \qquad \text{(Neden ?)}$$

bulunur. Demek ki H yi temsil eden seri

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n.n!}x^n$$

serisi ile e^x i temsil eden $\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$ dizilerinin çarpımı olmalıdır.

(**Çözenler:** Almas Rımov, Atasağun Baysal.)

Y69. Verilen herhangi bir n artı tamsayısı için, hiç biri asal olmayan, içlerindeki her çift aralarında asal olan ve bir aritmetik dizi teşkil eden n tamsayı bulunduğunu gösteriniz.

Çözüm. Herhangi bir $N \geq 2$ tamsayısı ve $2 \leq k \leq N$ şeklinde herhangi diğer bir k tamsayısı için, $N! + k$ nin hiç bir zaman asal olmadığını hatırlayalım. n tamsayısı verildikte, $p > n$ olacak şekilde bir p asal sayısı ve $N \geq p + (n-1)n!$ olacak şekilde de bir N tamsayısı alalım. Bu suretle uzunluğu n olan ve elemanlarının hiç birisi asal olmayan bir $N! + p$, $N!+p+n!$, $N!+p+2n!, \cdots N!+p+(n-1)n!$ aritmetik dizisi elde ederiz. Bu diziye ait her çiftin aralarında asal olduğunu iddia ediyoruz : Eğer $i \neq j$ için $N!+p+in!$ ve $N!+p+jn!$ sayılarının ikisini de bölen bir q asal sayısı olsaydı, q bu sayıların farkını da, yani $(i-j)n!$ i de bölmeli, böylece $q \leq n$ olmalıdır. (Neden ?) O zaman q, $N!$ i, dolayısıyla p yi de bölebilmelidir ki bu imkansızdır.

(**Çözenler:** Atasağun Baysal, Almas Rımov.)

Y70. Bir ABC eşkenar üçgeninin çevrel çemberinin A köşesi karşısındaki yayı üzerinde herhangi bir P noktası alındığında, PAB, PAC üçgenlerinin içteğet çemberlerinin yarıçaplarının toplamından PBC üçgeninin içteğet çemberinin yarıçapı çıkartılarak elde edilen miktarın P noktasının konumundan bağımsız olduğunu gösteriniz. (*Hüseyin DEMİR*)

Çözüm. PBC, PCA, PAB üçgenlerinin içteğet çemberlerinin yarıçaplarını sırasıyla r_1, r_2, r_3 le gösterelim. $a = |BC| = |CA| = |AB|$, $R_1 = |PA|$, $R_2 = |PB|$, $R_3 = |PC|$ yazalım. Batlamyus teoreminden,

$$|PA||BC| = |PB||CA| + |PC||AB|,$$

yani

$$R_1 a = R_2 a + R_3 a$$

veya

$$R_1 = R_2 + R_3$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{R_2 + R_3 - a}{2}\tan 60^\circ = \frac{R_1 - a}{2}\sqrt{3} \\
r_2 &= \frac{R_3 + R_1 - a}{2}\tan 30^\circ = \frac{R_3 + R_1 - a}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} \\
r_3 &= \frac{R_1 + R_2 - a}{2}\tan 30^\circ = \frac{R_1 + R_2 - a}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}
r_1 + r_2 - r_3 &= \frac{2R_1 + R_2 + R_3 - 2a}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} \\
&\quad - \frac{R_1 - a}{2}\sqrt{3} \\
&= \frac{3R_1 - 2a}{2}\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{R_1 - a}{2}\frac{3}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{a}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

tür.

(**Çözenler:** Ali Tombak, Metin Bekil, Almas Rımov, Ruhi Tabur, Atasağun Baysal, Yaşar Kandur, Fatih Uzunoğlu, Bayram Yenikaya, Turgay Uçkun.)

Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz :

1. *Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda, okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.*
2. *Kâğıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.*
3. *Çözümleri, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 06531 ANKARA adresine, 1 Mayıs 1994 tarihine kadar ulaşacak şekilde gönderiniz.*

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlamamız yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sayabiliriz:

- *Konu sunuşları,*
- *Matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar,*
- *Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülememiş ünlü problemlerin tanıtımı,*
- *Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler,*
- *Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar,*
- *Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler,*
- *Matematik dünyasından güncel haberler.*

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihan daktilo ile yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar :

Matematik Dünyası
ODTÜ Matematik Bölümü
06531 Ankara

adresine gönderilecektir.

Sayın Okurlarımız,

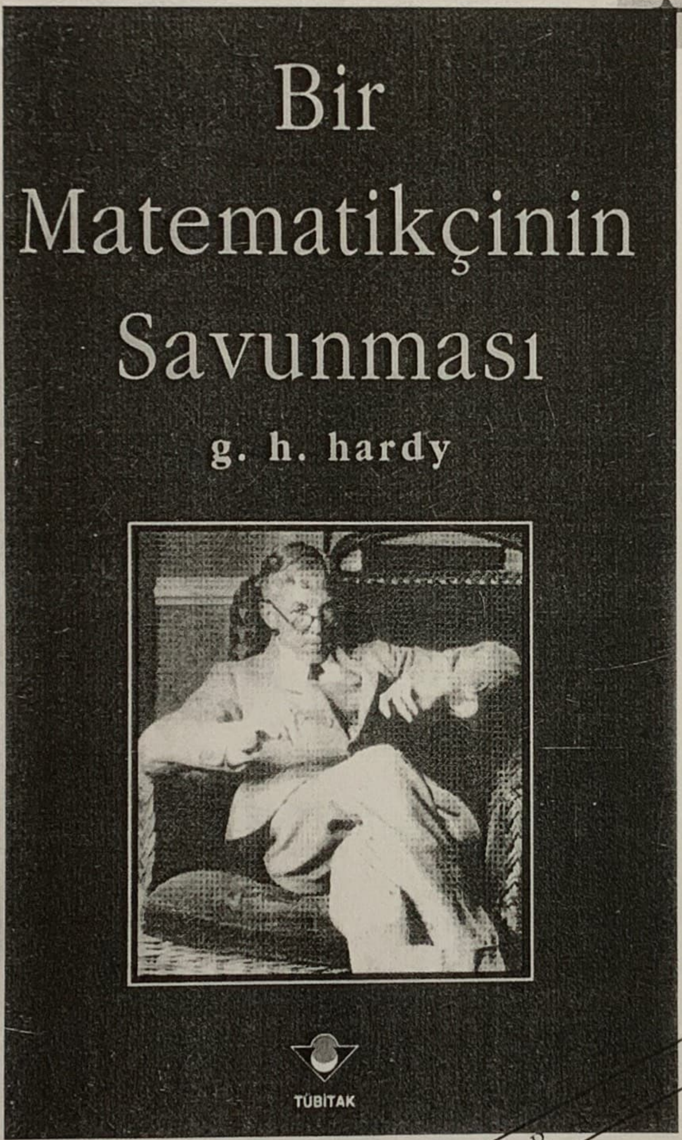
Matematik Dünyası, bu sayı ile üçüncü yılını tamamlıyor. İlk iki cildi kapsayan cilt kapakları hazırlanmıştır. Cilt kapakları için posta çeki hesabına 40.000.-TL. yatırdıklarında, isteyen abonelerimize, kapaklar önümüzdeki sayı ile birlikte, postalanacaktır.

İlk iki cildin sayıları (on sayı) tanesi 25.000.-TL. karşılığında satışa çıkarılmıştır. Bu sayıları edinmek isteyen okurlar, tutarını posta çeki hesabına yatırıp açık adreslerini bildirdikleri taktirde, istedikleri sayılar adreslerine postalanacaktır.

Matematik Dünyası, 1994 yılı abone ücreti 75.000.-TL. tane satış fiyatı ise 20.000.-TL. olarak saptanmıştır. Abone olmak isteyen okurların, banka aracılığı ile ödemeleri yapmaları halinde dekont ve adreslerini **Matematik Dünyası** adresine göndermelerini **önemle** rica ederiz.

Saygılarımızla

Popüler Bilim Kitapları Dizisi



Matematik yalnızca bir araç mıdır? "Gerçek Matematik" nedir? Yaratıcılık dönemini geride bıraktığını ve artık matematik "yapmak" yerine onun hakkında yazmaktan başka çaresi olmadığını alçakgönüllülük ve hüzünle ifade eden İngiliz matematikçi Hardy, bu kitabıyla belki de yaratıcılığının en sıcak ürünlerinden birini sunuyor...

30.000 TL

POPÜLER BİLİM KİTAPLARI DİZİSİNDE YAYINLANAN KİTAPLAR BİLİM VE TEKNİK DERGİSİNİN 101621 NO'LU POSTA ÇEKİ HESABINA ÜCRETİ YATIRILARAK VEYA GAZETE BAYİ, KİTAPEVLERİ VE TÜBİTAK KİTAP SATIŞ BÜROSUNDAN EDİNİLEBİLİR.

TÜBİTAK KİTAP SATIŞ BÜROSU: ATATÜRK BULVARI NO:221 06100 KAVAKLIDERE/ANKARA
TEL: (312) 468 53 00 /4001 FAKS: 427 13 36