TEMMUZ 2000 / CİLT: 9 / SAYI: 3

ISSN - 1300-624X

Matematik
D Ü N Y A S I

TÜRK MATEMATİK DERNEĞİ TARAFINDAN İKİ AYDA BİR YAYINLANIR

MATEMATİK DÜNYASINDAN...

Dünya Matematik Yılı olan 2000 yılının 7.ayına girerken dergimizin 3.sayısıyla yeniden sizlerle buluşmaktan mutluyuz. İkinci sayımızda duyurduğumuz gibi, 19.05.2000 günü 5. Antalya Matematik Olimpiyadının 2. Aşama Sınavı yapıldı; öteki yıllardan farklı olarak, bu yıl sınav hemen değerlendirildi ve 21.05.2000 günü madalya ve ödül töreni gerçekleştirildi.

Bu sayımızda, 5. Antalya Matematik Olimpiyadı 2. Aşama Sınavı sorularını yayınlıyoruz. Soruların çözümlerini gelecek sayımızda vereceğiz. Bölümümüz araştırma görevlisi Z. Güvenç 'in olimpiyatlarla ilgili izlenimlerini, olimpiyatlara yarışmacı olarak katılan I. Aşıkdoğan 'ın olimpiyadın ardından matematik defterine düştüğü notları da zevkle okuyacağınıza inanıyoruz. Ayrıca, bu sayımızda N. Ergun 'un "Eski Yunan Uygarlığında Geometri", H. İ. Karakaş 'ın "Mükemmel Sayılar" başlıklı yazılarınının da tüm okurlarımızca ilgiyle okunacağını umuyoruz.

Sevinçle ifade etmek isteriz ki, yarışma problemlerine çözüm gönderenlerin sayısında önemli ölçüde artma gözlemliyoruz. Önümüzdeki günlerde bu sayının daha da artacağına inanıyoruz. Bu sevinçleri sizlerle paylaşırken, 2001 yılında **Matematik Dünyası** 'nı yayımını üstlenecek bir ekibin şimdilik ortaya çıkmamış olmasından kaygı duyduğumuzu belirtmek isteriz.

Tümünüze Antalya 'dan selam ve sevgiler...

MATEMATİK DÜNYASI

İ Ç İ N D E K İ L E R

Matematik Dünyası

SAHİBİ	:	Türk Matematik Derneği adına Başkan TOSUN TERZİOĞLU
YAYIN KURULU	:	H. İbrahim Karakaş, Doğan Çoker, İlham Aliyev, Fikri Gökdal
DİZGİ	:	Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği tarafından, Matematik Vakfının işbirliği ve UNESCO'nun desteğiyle iki ayda bir yayınlanmaktadır.

Matematik Dünyası'nın, Milli Eğitim Bakanlığı Talim Terbiye Kurulu Başkanlığının 20 Haziran 1991 gün ve 660 YKD. Baş. K.I. Şb. Müd. 5386 sayılı kararı ile okullara tavsiyesi uygun bulunmuştur.

ABONE KOŞULLARI (2000) : Yurtiçi yıllık (1 kişilik) 3.000.000 TL; yurtiçi yıllık (en az 10 kişilik grup için kişi başına) 2.500.000 TL. (Yıllık abone ücretinin "Türk Matematik Derneği" nin "Matematik Dünyası Dergisi" adına açtırdığı 215511 no'lu Posta Çeki hesabına ya da Türkiye İş Bankası Laleli (İstanbul) Şubesi 1084.304400.334887 no'lu "Matematik Dünyası Dergisi" hesabına yatırılarak, dekontunun bir örneğinin dergi abone adresine gönderilmesi yeterlidir.)

ABONE ADRESİ: Matematik Dünyası, Akdeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA
Tel : 0.242.227.89.00/1116 ; Faks : 0.242.227.89.11 ; E-Posta : mdunyasi@pascal.sci.akdeniz.edu.tr

ESKİ YUNAN UYGARLIĞINDA GEOMETRİ

Nurettin Ergun
İstanbul Üniversitesi, Matematik Bölümü, İSTANBUL

En parlak dönemi yaklaşık sekiz yüzyıl sürmüş olan, pek çok usta düşünür, matematikçi, ozan, mimar, oyun yazarı ve yontucu yetiştiren Eski Yunan uygarlığında matematiğin ve özellikle geometrinin gelişim ve evrimini bir kaç sayfalık bir yazıda aktarabilmek pek olası değildir doğrusu. Biz bu yazıda, bu konuda, büyük ölçüde (IV. kısım dışında), Türkçeye de çevrilmiş olan anıtsal bir kaynaktan, B. L. Van Der Waerden 'in ünlü yapıtı **Bilimin Uyanışı** 'ndan yararlanarak ve çeviri dilini biraz günümüz Türkçesine uyarlayarak bir kaç kesit aktarmak istiyoruz. 1950 'lerin başında yazılan bu yapıt, kanımızca, bu konuda ayrıntılı bilgi edinmek isteyenler için günümüzde temel başvuru kitabı olma özelliğini sürdürmektedir. Tüm yazıda, dikkatle ve kavrama isteğiyle okunduğunda rahatlıkla anlaşılıp kavranabilecek olan ve gerçekten yalnızca çok temel ve yalın bilgilerin kullanıldığı iki ünlü ve tarihsel matematiksel kanıtlamaya yer verdik. Bunu, açıkcası, önemsiyoruz. Bu yazının amacı, hiç kuşkusuz, okuyucuyu Van Der Waerden 'in 500 sayfalık başyapıtını okuması konusunda kışkırtmaktır. Bu yapıtın, az da olsa, belirli düzeyde matematik bilgisi bilmeyi gerektirdiğini eklemeliyiz.

I. Yunan Matematiğinin Başlangıcı

Bugün, matematiğin Milet 'li Thales 'den en az bin yıl önce Babilonya 'da başladığını biliyoruz. Thales 'e atfedilen teoremlere yakından bakarsak, bunların matematikteki buluşların başlangıç noktası dönemine ait olmaktan çok, matematiğin dizgeli (sistemli) ve mantığa dayanan kuruluşunun başlangıç dönemine ait oldukları anlaşılır. Buluşlar döneminin başlangıcında, bu buluşların verdiği heyecanla insan daha çok şu gibi problemlerle ilgilenir: "Bir üçgenin ya da bir dairenin alanını nasıl hesaplayabilirim?", "Bir piramidin hacmini ya da kirişin uzunluğunu nasıl bulabilirim?", "Bir yamuğu, tabanına paralel bir doğru parçasıyla nasıl iki eşit parçaya bölebilirim?" Eski Mısır ve Babilonya metinlerinin uğraştıkları problemler de bunlardan başka şeyler değildir. Ancak bunlardan şu can alıcı soru ortaya çıkar: "Tüm bunları nasıl kanıtlayabilirim?" Eski matematiğin bazıları doğru, bazıları yanlış sonuçları, aralarında mantık bağı bulunmadan, yabancı bir kavmin öğrenmeye susamış genç kuşağının eline geçtiğinde, bu sorular büyük bir önem kazanırlar. Thales 'in döneminde Eski Mısır ve Eski Babilonya matematiği çoktan ölü bilgi durumuna gelmişti. Thales 'in bu bilgilerin içinden hesap kurallarını sökerek öğrenmesi olasıydı ama bunlara temel oluşturan akıl yürütme dizisi artık tümüyle unutulmuştu. Thales, Babilonyalılardan daire alanının $3r^2$ olduğunu, buna karşın Mısırlılardan aynı alanının $(\frac{8}{9} \times 2r)^2$ olduğunu duymuş olabilirdi, peki doğru ve yanlış hesaplamaları nasıl ayırt edebilirdi? Çok basit:

"Onları kanıtlayarak, kısacası onlardan mantıklı bir matematik dizge oluşturarak!"

Eudemos 'a göre Thales 'in yaptığı budur işte. Thales bu dizgenin başında, ters tepe açılarının eşitliği, ikizkenar bir üçgenin taban açılarının eşitliği, bir çapın daireyi iki eşit parçaya ayırması v.b. gibi apaçık görünen temel şeylerin kanıtlamasını yapmıştır.

Eski Yunan matematikçilerinin geometriyi tek başlarına bulmuş oldukları ve kendilerinden önceki kültürlerden önemli hiç bir şey almamış olduklarını söyleyen geleneksel inanışı bırakmamız gerektiği artık açıktır. Bu inanış ancak Babilonya matematiği henüz bilinmediği sürece tutunabilirdi. Bununla

Thales 'in dehasından hiç bir şey eksilmiş olmuyor, tersine, o ancak şimdi hakkı olan onura kavuşuyor: Bu onur geometriyi mantıksal bir yapıya dönüştürmek, kanıtlama kavramını geometriye sokmaktır.

Gerçekten Yunan matematiğinde belirleyici ve tümüyle yeni olan şey, kanıtlamalar aracılığıyla teoremden teoreme adım adım ilerleyiştir. Yunan matematiğinin oluşturulduğu malzeme yeni değildi, yapı taşları daha eski kültürlerden, bunları eşeleyerek ortaya çıkarılabilirdi. Oysa yapının biçemi yeni olup, Yunanlıların berrak düşünüş biçimine tanıklık etmektedir. Bu öyle bir düşünüş biçimidir ki, karanlık kalan hiç bir noktaya, elde edilen bilgilerin doğruluğuna ilişkin en küçük bir kuşkuya yer yoktur.

II. Geometriciler Kataloğu

İ. S. 450 yıllarında Eflatun (Platon) 'un Akademisine son bir parlayış getiren yeni Platoncu Proklos, Euekleides 'in **Elemanlar** 'ının birinci kitabına ilişkin yorumunda, büyük ölçüde Eudemos 'un **Matematik Tarihi** adlı yapıtından yararlanarak, Thales (İ. Ö. 600) 'den Euekleides (İ. Ö. 300) 'e kadar geçen dönemi kısaca özetliyor:

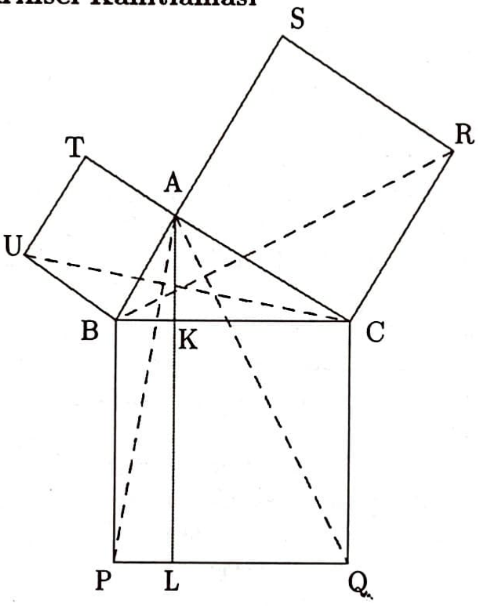
> "Nasıl ki Fenikelilerde tecim ve ulaştırma etkinlikleri sonucunda sayılar konusundaki bilgilerimizin başlangıcı doğduysa, yukarıda bildirdiğimiz nedenden Mısır'da da geometrinin temelleri atıldı. Thales ise Mısırdan döndükten sonra bu bilimi Yunanistan 'a getirdi ve kendisi de buna pek çok buluşlar ekledi, başka pek çok buluş için de kendisinden sonra gelenlere yol gösterdi. Onun yöntemi kısmen genel olup kısmen de sezgiye dayanıyordu. Söylentiye göre kendisinden sonra ozan Stesichoros 'un kardeşi Mamertios geometri ile uğraşmış olup, Elis 'li Hippias 'ın anlattığına göre bu yüzden ün kazanmıştı. Bunları izleyen Pythagoras, bu bilimi ileri bir eğitim dizgesinin içine soktu. Onun araştırmaları bu bilimin en yüksek ilkelerine ilişkindi ve onun kuramsal araştırmaları her türlü maddi etkilerden uzak olarak arı (sırfi) düşünce alanında dolaşmaktaydı. Orantılar (ya da irrasyonel sayılar) bilgisini yaratan ve 'beş evrensel cismin' (yani düzgün çokyüzlülerin) çizimini bulan da odur. Bunlardan sonra Kilizman 'lı Anaxagoras geometrinin bir çok problemiyle uğraştı. Ondan daha genç olan Sakız 'lı Oinopides de o sıralarda geometride çalışmıştır. Bu ikisi Eflatun tarafından **Rakiplerde** adlı yapıtta matematik bilgileriyle ün salmış kişiler olarak anılmaktadır. Bunlardan sonra Hilal 'lerin alanını bulan Sakız 'lı Hippokrates ve Kyrene 'li Theodoros geometrinin ünlü temsilcileri oldular. Gercekten Hippokrates 'e tarihte ilk kez bir temel matematik kitabını yazan kişi olarak rastlamaktayız. Onlardan sonra öteki matematik dalları yanında özellikle geometrinin en büyük atılımını çoşkulu ve gayretli çalışmalarına borçlu olduğumuz Eflatun gelir. O, yapıtlarına açık bir biçimde baştan başa matematik akıl yürütmeler yerleştirmiş ve felsefe öğrenenlerde her fırsatta matematiğe karşı beğeni ve tutku uyadırmaya çalışmıştır. Bu sıralarda, teoremlerin sayısını arttırmış ve bunları daha bilimsel bir çerçeveye sokmuş olan Taşoz 'lu Leodamas, Tarent 'li Archytas ve Atinalı Theaitetos da yaşamışlardı. Leodamas 'tan daha genç olan Neokleides ve öğrencisi Leon, öncüllerinin bıraktığı geometriyi epeyce genişlettiler. Leon kanıtlarının zenginliği ve elverişliliği ile belirginleşen bir temel geometri kitabı yazabilmek ve verilmiş bir problemin çözülüp çözülemeyeceğine ilişkin kesin koşullar koşmak başarısını gösterdi. Ondan sonra, Leon 'dan biraz daha genç ve Eflatun 'un öğrencilerinin arkadaşı olan Knidos 'lu Eudoxos ilk kez genel teorem denilen teoremlerin sayısını çoğalttı. O zamana kadar bilinen üç tane orantıya üç tane daha ekledi ve Eflatun tarafından başlanan, doğrunun bölünmesi konusunu analitik yöntem kullanarak bir çok teoremlerle ileri götürdü."

Proklos daha sonra Eflatun 'un kurduğu akademi çatısı altındaki çalışmaları, ardısıra gelen Eudoxos ve Eukleides gibi usta geometricilerin çalışmalarını anlatmayı sürdürmektedir.

III. Eflatun'un Yakınışı

İ. Ö. 374 yılında yazdığı ünlü **Devlet** adlı yapıtında Eflatun, İ. Ö. 420 'lerde, geometrinin, özellikle uzay geometrinin gelişimindeki duraksamayı ve yetersizliği, o dönem yaşamış olan hocası Sokrates 'in ağzından yakınarak şöyle dile getiriyor: "Bu konunun yeterince aydınlatılmamış olduğu doğrudur. Bunun iki nedeni var. Hem hiç bir devlet bu bilime (uzay geometri) gereken değeri vermediğinden yapılan araştırmalar büyük güçlükler nedeniyle ancak çok yavaş olarak yürüyor, hem de araştırıcıların bir yol göstericiye gereksinimleri vardır ki, onsuz fazla bir şey yapmaları çok zordur. Fakat böyle bir yol göstericinin kendiliğinden ortaya çıkması olası değildir; ikincisi, böyle birisi çıksa bile, bugünkü ortama göre, bilginler kibirlerinden ötürü onu izlemek istemeyeceklerdir! Oysa bu bilime karşı gerekli saygıyı duyacak devlet, bütünüyle yol göstericiliği üzerine alırsa, o zaman onu dinleyeceklerdir ve bu bilgi dalında sürekli ve zorlu araştırmalar sonucunda o alandaki gerçekler ortaya çıkmış olacaktır. Çünkü bugün bile bu bilim dalı, büyük kütle tarafından küçümsenmesine ve geri plana itilmesine karşın,onu kılgısal (pratik) bir yarar beklemeden, yalnızca büyük çekiciliğinin etkisiyle araştırmak isteyenler tarafından zorlu bir çalışma ile, tüm engellemelere karşın yükseltilmeğe çalışılmaktadır. Demek ki onun tam ışığa kavuşması beklenmedik bir şey olmayacaktır."

IV. Eukleides' in Tarihsel Kanıtlaması



Dik açıyı ve dik üçgeni kim bilmez ? Bir açısı dik açı yani 90^o olan bir üçgene (öteki iki açı zorunlu olarak dar açı olacaktır, çünkü iyi bilindiği gibi, bir üçgenin üç açısının toplamı iki dik açıya eşittir), dik üçgen denir. Dik açıyı oluşturan kenarlara bu dik üçgenin dik kenarları, dik açının karşısındaki kenara ise eğik kenar ya da 'hipotenüs' denir. Bir dik üçgende hipotenüsün uzunluğunun karesi iki dik kenarın uzunluk kareleri toplamına eşittir. Bu ünlü önermeye **Pythagor Teoremi** denir. Pythagor 'un adıyla anılan, oysa usta ve titiz matematik tarihçilerinin vurguladığı gibi, onun tarafından kanıtlandığını gösteren hiç bir kanıtın bulunmadığı bu ünlü teoremin Pythagor 'dan yüzlerce yıl önce Eski Çin ve Mısır 'da bilindiğini (kanıtlandığını değil, bilindiğini) biliyoruz. Tarih boyunca yüzlerce bağımsız kanıtlaması verilmiş olan bu ünlü önermenin, Eukleides 'in 15 kitapçıktan oluşan ünlü ve anıtsal başyapıtı **Elemanlar** 'ın birinci kitapçığında yer alan tarihsel kanıtlamasını vermek istiyoruz. Bu ünlü kanıtlamanın usta işi geometrinin yetkin bir örneğini oluşturduğunu ve üstelik neredeyse ortaokul bilgisi ile kavranabildiğini rahatlıkla söyleyebiliriz. Herhangi bir üçgenin alanının, herhangi bir kenarının uzunluğu ile bu kenarın karşısındaki köşeden bu kenara indirilen dikmenin uzunluğu çarpımının yarısına eşit olduğunu anımsamak, neredeyse bu tarihsel kanıtlamayı kavramak için yeterlidir. Şimdi A tepe açısı dik (yani 90^o) olan ABC dik üçgeninde bu dik açı karşısındaki BC kenarı (yani hipotenüs) üzerine $BPQC$ karesini, öteki iki dik kenar üzerine ise sırasıyla $UBAT$ ve

$ACRS$ karelerini çizelim (bak. aşağıdaki şekil). Bilindiği gibi tüm kenarları eşit uzunlukta olan özel dikdörtgene kare denilir.

A köşesinden hipotenüse indirilen dikme BC kenarını K ve PQ kenarını ise L noktasında kessin. Birinci önemli gözlemimiz UBC ve ABP üçgenlerinin eşit olduklarını söyler. Gerçekten UBC üçgeninin UB kenarı, apaçıktır ki ABP üçgeninin AB kenarına, UBC üçgeninin BC kenarı ise ABP üçgeninin BP kenarına eşittir. Üstelik UBC üçgenindeki UBC tepe açısı ile ABP üçgenindeki ABP tepe açıları eşittir, çünkü bu her iki açı da dikkat edilirse $90^o + ABC$ toplam açısına eşittir. Üstelik bu eşit açıların yan kenar uzunlukları da eşit olduğu için, bu üçgenlerde bu eşit açılar karşısında yer alan UC ve AP kenarları da eşit olur. İkinci önemli gözlemimiz, $UBAT$ karesinin alan değerinin UBC üçgeninin alanının iki katına eşit olmasıdır, çünkü bu üçgende UB kenarının karşı köşesi olan C köşesinden UB kenarına indirilen dikmenin uzunluğu UT kenarının yani AB kenarının uzunluğuna eşittir, dolayısıyla UB ve UT kenarlarının uzunlukları çarpımı (ki $UBAT$ karesinin alanıdır) UBC üçgeninin alan değerinin iki katıdır, çünkü UBC 'nin alanı bu çarpımın yarısıdır, bir üçgenin alanı için yukarda söylenenleri anımsayın lütfen! ABP üçgeninin BP kenarının karşı köşesi olan A köşesinden bu kenara indirilen dikmenin uzunluğu BK kenarının uzunluğuna eşit olduğundan $PLKB$ dikdörtgeninin alanı, ABP üçgeninin alan değerinin iki katına eşittir. Oysa UBC ve ABP üçgenleri eşit olduğundan $Alan(UBAT) = Alan(BPLK)$ bulunur. Benzer biçimde BCR ve AQC üçgenleri eşit olduğundan $Alan(ACRS) = Alan(BCR) = Alan(AQC) = Alan(LQCK)$ geçerlidir. Oysa apaçıktır ki $Alan(BPQC) = Alan(BPLK) + Alan(LQCK)$ olduğundan, sonuçta $Alan(BPQC) = Alan(UBAT) + Alan(ACRS)$ bulunur, bu ise, bir karenin alanı kenar uzunluğunun karesine eşit olduğundan, hipotenüsün uzunluğunun karesinin, AB ve AC dik kenarlarının uzunluklarının kareleri toplamına eşit olması demektir. Kanıtlama başarıyla bitirilmiştir.

V. Kuramsal ve Kılgısal Alanların Büyük Dehası: Arkhimedes

İ. Ö. üçüncü yüzyılın ortalarında, dünyanın kültür merkezi İskenderiye 'den çok uzaklarda, bir Yunan koloni kenti olan Siraküza 'da tüm eski dönemlerin tartışmasız en büyük matematikçisi, parlak deha Arkhimedes (Arşimed) yaşamaktaydı. Pheidas adında bir gökbilimcinin oğlu olan Arkhimedes 'in, döneminin ileri gelen ailelerinden birisinin üyesi olup olmadığını bilmiyoruz, ama onun Siraküza sarayının en yüksek çevreleriyle, bu arada kral Hieron ve onun oğlu ve ardılı olan Gelon ile dostluk kurduğu bilinmektedir. Onun bir süre Mısır 'da bulunmuş olması olasıdır. Diodoros 'un söylentisine göre suyu kuyulardan çıkarmak için Kochlias adı verilen helezonlu bir su tulumbası icat etmiş olup, bu tulumba İspanya 'daki gümüş madenlerinde de kullanılmıştı. İskenderiye 'de yaşayan gökbilimci Sisam 'lı Konon ile olan dostluğu onun bir süre bu kentte yaşadığının kanıtı sayılmaktadır. Arkhimedes 'in kişiliği ve çağdaşları üzerinde bırakmış olduğu büyük etki hakkında yeterli kanı edinmek için onun hakkında kesinlikle bilinen bir kaç olay ile yetinmemeli, kendisi ve olağanüstü buluşları çevresinde örülen söylencelere de başvurmalıyız. İşte bunlardan bazıları: Arkhimedes 'e saflığını ölçmek üzere verilmiş olan kral Heron 'un altın tacının öyküsünü bilmeyen yoktur. Arkhimedes'in kendisini bu probleme vermiş olduğu sıralarda bir gün hamamda yıkanırken birden, tacın hacmini (ister Vitruvius 'un düşündüğü gibi, tacı su dolu bir kaba daldırarak taşan suyun ağırlığını tartmak, ister ötekilerinin ileri sürdüğü gibi, tacı yukarı iten basınç kuvvetini ölçmek yoluyla olsun) nasıl bulabileceği aklına gelince "heureka! heureka!" diye bağırarak eve koşması ünlüdür. Kral Hieron 'un Mısır kralı Ptolemaios 'a armağan vermek amacıyla yaptırdığı her türlü lüks ile donatılmış harika bir Siraküza gemisi bir türlü denize indirilemeyince, yardıma çağrılan Arkhimedes bu iş için tek bir kişinin kullanabileceği bir aygıt tasarladı. Daha sonra bu aygıtla gemiyi denize indiren kral çoşkulu bir biçimde şöyle dedi: "Bugünden sonra Arkhimedes 'in her söylediğine inanılmalıdır". Romalı tarihçiler Polybios, Livius ve Plutarchos onun tarafından icat edilmiş araç ve makinalardan uzun uzadıya söz ederler. Romalıların Siraküza 'ya yaptıkları saldırılar, yetmiş yaşını aşmış matematikçinin kişisel yönetimi altında bu makinalarla geriye püskürtülüyordu. Güçlü mancınıklar ağır kaya parçalarını uzaklardan Roma lejyonları üzerine fırlatıyor, akrep denilen daha küçük mancınıklar düşman üzerine yakından kurşun yağdırıyorlardı. Deniz kıyısında ise bir takım vinçler dışarı çevrilerek Roma gemileri üzerine büyük taşlar ve ağır kurşun parçaları düşürüyor ya da demirden kıskaçlar gemileri pruvasından tutup yukarı kaldırdıktan sonra kıskacı açarak denize bırakıveriyordu, böylelikle batmalarına, en azından su almalarına neden oluyordu. Saldırıyı yöneten Romalı komutan Marcellus bu durum karşısında şaşkınlığa düşmüş ve kendi adamlarıyla "Denizi, kovayla su boşaltırcasına gemilerimize boşaltan, savaş kulelerimizi bizim için utanılacak bir tarzda döverek geri atan, bir sürü gülleyi hep birden aynı anda üzerimize fırlatarak yüz kollu söylence devini de geride bırakan bu geometri devi ile savaşmaktan vazgeçmemiz daha iyi olacak" diye alay etmişti. Plutarchos 'un bildirdiğine göre, Arkhimedes için mekanik buluşlar, Kral Hieron 'un kendisini, gerçekliğin gerekleriyle elle tutulur bir biçimde uğraşmak yoluyla, soyut bilgilerden biraz olsun vazgeçip, somut şeylere yönelerek üstün aklını sıradan insanların anlayışına da açması için onu inandırması üzerine, sanki oyuncakla oynarcasına uğraşmış olduğu, bir tür geometriden ürettiği yan ürünlerdi. Plutarchos şöyle sürdürüyor:

> "Bu buluşlar her ne kadar onu insanüstu bir dehanın ününü getirdiyse de, bu konular üzerine yazılı hiç bir şey bırakmak istememişti. Arkhimedes aygıtlar tasarlayıp gerçekleştirmeyi ve genel olarak kılgısal (pratik) yarar amacıyla yapılan her tür çabayı aşağı ve sıradan buluyor ve çabalarını, yalnızca, güzellik ve yetkinlikleri nedeniyle yararlı olmanın dışında kalan şeylere yöneltiyordu."

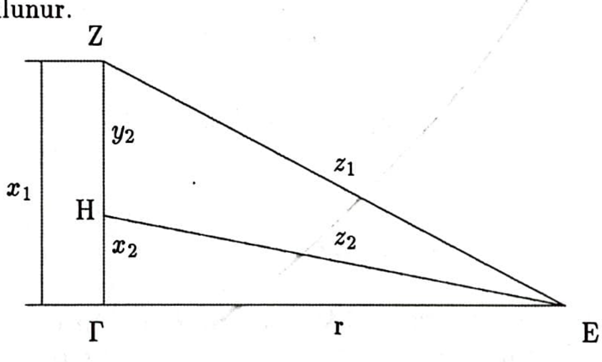
Plutarchos 'a göre Arkhimedes matematiğe karşı büyük bir tutkunun tutsağıydı:

> "O peşini hiç bırakmayan bir esin perisinin büyüsü altında, yemek yemeyi unutuyor ve bedeninin bakımını umursamıyordu; çoğu kez olduğu gibi zorla yıkanmaya ve yağlanmaya götürüldüğünde bile, sözcüğün tam anlamıyla esin perilerinin tutsağı olarak kül üzerinde geometrik şekiller çizer ve parmağıyla yağlanmış bedeni üzerine çizgiler çekerdi."

İngiliz matematik tarihçisi T. Heath şunları yazıyor: "Arkhimedes 'in risalelerinin ayrım yapılmaksızın tümü, matematik anlatım gücünün birer anıtıdır. Ereğin adım adım açıklanması, teoremlerin ustaca sıralanışı, amaçla doğrudan ilgili olmayan her tür ayrıntının bir kenara itilişi, tüm akıl yürütmenin en kusursuz bir biçimde tamamlanması, yetkinlik bakımından o denli büyük bir etki bırakmaktadır ki, okuyucu yazının karşısında derin bir saygıyla karışık bir korku duygusuna kapılıyor. Plutarchos 'un (**Marcellus 'un Yaşamı**, Bölüm 17 'de) söylediği şu sözler doğrudur: O geometrinin en güç ve karmaşık problemlerini yalın ve apaçık teoremler biçiminde ifade ettiği kanıtlamalarla çözerdi. Fakat onun, vardığı sonuçlara ulaşmak için kullandığı yöntem bir giz perdesiyle örtülü kalmıştır. Onun bulmuş olduğu teoremlerin, onlara son biçimini vermiş olduğu risalelerindeki akıl yürütmelerle bulunmadıkları apaçıktır. Eğer Arkhimedes 'in geometrik risalelerinden başka bir şey elimizde bulunmasaydı, Wallis 'in söylediği gibi, onun kendisinden sonra gelenlerden kendi buluş yöntemini esigemek, ama buna karşın onlara bulmuş olduğu sonuçları kabul ettirmek istermişçesine, araştırmalarının izlerini bilerek örtmüş olduğunu düşünecektik. Yalnızca Arkhimedes değil, Wallis 'e göre, hemen tüm eski dönem matematikçileri, problemlerin çözümlenmesinde kullandıkları yöntemleri, böyle bir yönteme sahip oldukları apaçık iken, kendilerinden sonra gelenlerden o denli saklamışlardır ki, yeni dönem matematikçilerine eskisini aramaktansa onları kavramak için yeni bir çözümleme yöntemi bulmak daha kolay gelmiştir. Tek ayrıksı durum, Heiberg 'in mutlu bir raslantıyla bulup, kazınmış özgün metnin üzerine yeni bir metin yazılmış olmasına karşın hemen hemen tümüyle okuyup gün ışığına çıkarmayı başardığı, Arkhimedes 'in **Yöntem** 'i olmuştur. Arkhimedes bu kitabında alan ve hacimler konusunda bir takım teoremleri, bir şeklin parçalarını alan ya da hacim ölçüleri bilinen daha basit bir şeklin parçalarıyla karşılıklı kıyaslayıp tartmak yoluyla, kısacası mekanik yöntemlerle nasıl bulduğunu anlatmaktadır. Bilimsel bir kanıtlama oluşturmamalarına karşın, o, bir takım teoremlerin doğruluğunu bize sezdiren araç ve yöntemlerle, bu teoremlerin doğruluklarının tam anlamıyla geçerli olabilmesi için verilmesi gereken sağlıklı ve kabul edilebilir geometrik yöntemlerle yapılmış kesin kanıtlamaları, özenli bir biçimde birbirinden ayırmaya büyük önem vermektedir. Bu konuda Arkhimedes şunları söylemektedir: 'Bazı şeyleri bana esinlendiren mekanik yöntemler oldu, fakat onları sonradan geometri ile kanıtlamak zorundaydım, çünkü bu yöntemler gerçek bir kanıtlama oluşturmazlardı. Bununla birlikte, önce bu yöntemle çözüme ilişkin bilgi edindikten sonra kanıtlama yapmanın, kanıtlama öncesi böyle bir bilgi edinmeksizin bunu yapmaktan daha kolay olduğu apaçıktır.' "

VI. Arkhimedes 'in Bir Kanıtlaması

Arkhimedes 'in kuramsal dehasını gösteren onlarca kanıtlama arasında, şimdi vereceğimiz kanıtlama, tarihsel açıdan en ünlü kanıtlamalardan birisidir kuşkusuz. Arkhimedes burada, ilk kez bir çemberin uzunluğunu çapı yoluyla yaklaşık hesaplama başarısını göstermekte ya da daha sağlıklı bir biçimde söyleyecek olursak yarıçapı r ve dolayısıyla çapı $d = 2r$ olan bir çemberin uzunluğunun $3\frac{1}{7}$ 'den küçük buna karşılık $3\frac{10}{71}$ 'den ise büyük olduğunu kanıtlamaktadır. Böylelikle bir çemberin uzunluğunun çapına oranı olan sabitin, ünlü adıyla π (pi) sayısının $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ eşitsizliklerini gerçeklediği anlaşılmaktadır. Bu ünlü sayının rasyonel olmadığı ancak 1880 'lerde kanıtlanabilecektir. Arkhimedes aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi, önce merkezi E ve yarıçapı r olan çembere (bu çember şekilde çizili değildir.) önce Γ noktasından bir teğet çizmekte, daha sonra E köşesindeki 30 derecelik $\Gamma\hat{E}Z$ açısının EZ kenarı ile bu teğeti Z noktasında kesişmektedir. O halde ΓZ sözü edilen çembere dışından çizilen düzgün altıgenin (altıkenarlının) bir kenarının yarısıdır, çünkü otuz derecelik bu açı aslında tepe noktası E ve tepe açısı 60^o olan ve $E\Gamma$ doğrusunu bu tepe açısının açıortayı kabul eden, şekilde tam yarısını gördüğümüz bir eşkenar üçgenin (öteki yarısı, gördüğümüz şeklin alt tarafında simetrik bir konumdadır ve çizilmemiştir) taban kenar uzunluğunun yarısıdır. Başka bir deyişle $2x_1$ sayısı, çembere dışından çizilmiş ve altıda bir dilimi, ancak üst yarısını görebildiğimiz bu eşkenar üçgen olan düzgün altıgenin bir kenarının uzunluğudur. Şimdi $\Gamma\hat{E}Z$ açısının açıortayı ile $Z\Gamma$ kenarının kesişimi H noktası olsun. $H\Gamma$ ve ZH doğru parçalarının uzunluklarını ise sırasıyla x_2 ve y_2, ZE ve HE doğru parçalarının uzunluklarını ise sırasıyla z_1 ve z_2 ile gösterelim. ΓZ ise x_1 ile gösterilsin. O halde kolayca $x_1 = x_2 + y_2$ bulunur.



$Z\Gamma E$ dik üçgeninde otuz derecelik $Z\hat{E}H$ açısının sinüs değerinin, karşı dik kenar uzunluğunun, hipotenüsün uzunluğuna oranı olduğu için $x_1 : z_1 = \sin 30^o = 1 : 2$ nedeniyle önce $z_1 = 2x_1$ ve sonra bu dik üçgende Pythagor Teoremi nedeniyle $4x_1^2 = z_1^2 = r^2 + x_1^2$ ve dolayısıyla $r^2 = 3x_1^2$, yani $r : x_1 = \sqrt{3}$ bulunur. Bu aşamada Arkhimedes, yine kendi bulduğu

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

eşitsizliğinden yararlanmaktadır. Arkhimedes 'in bu şaşırtıcı eşitsizliği nasıl elde ettiğini bilmiyoruz. M. Cantor, T. Heath, K. Vogel ve C. Müller & O. Toeplitz gibi ünlü ve saygın matematik tarihçileri, Arkhimedes 'in olası kanıtlama yöntemi için çeşitli görüşler bildirmişlerdir. Evet Arkhimedes 'in kanıtlamasını sürdürelim.

Ünlü açıortay teoremi, bir üçgende bir açıortayın karşı kenarda belirlediği doğru parçalarının birbirine olan oranının, açının yanal kenar uzunluklarının birbirine oranına eşit olduğunu söylediği için $x_2 : y_2 = r : z_1$ ve dolayısıyla $x_2 z_1 = r y_2$ ve her iki yana $r x_2$ ekleyerek $x_2(z_1 + r) = x_2 z_1 + r x_2 = r y_2 + r x_2 = r(x_2 + y_2)$ ve dolayısıyla $r : x_2 = (z_1 + r) : (x_2 + y_2) = (z_1 + r) : x_1 = (z_1 : x_1) + (r : x_1)$

bulunur. Yukarıdaki hesaplamalar nedeniyle $r : x_1 = \sqrt{3} > 265 : 153$ ve $z_1 : x_1 = 2 = 306 : 153$ bulunduğundan sonuçta bunlar kullanılarak

$$r : x_2 > (306 : 153) + (265 : 153) = 571 : 153$$

elde edilir. Bu sonuçtan yararlanarak bu kez

$$z_2^2 : x_2^2 = (r^2 + x_2^2) : x_2^2 + 1 = (r^2 : x_2^2) + 1 > (571^2 : 153^2) + 1$$

ve bu son kesrin payının $349450 > (591\frac{1}{8})^2$ gerçeklediği gözlenerek sonuçta

$$z_2 : x_2 > 591\frac{1}{8} : 153$$

bulunur. Burada x_2 uzunluğu, sözü edilen çemberin dışına çizilen bu kez düzgün oniki kenarlının kenar uzunluğunun yarısıdır. Bu düzgün onikigenin bir dilimi bir eşkenar üçgen olup, $H\Gamma E$ üçgeni bu üçgenin üst yarısıdır, alt yarısı yine şekilde görülmemektedir. Arkhimedes bundan sonra bu kez onbeş derecelik $H\hat{E}\Gamma$ açısını iki eşit parçaya bölerek, elde edilen düzgün yirmidörtgenin kenar uzunluğunun yarısı x_3 olmak üzere, tümüyle benzer yöntemlerle

$$r : x_3 > 1162\frac{1}{8} : 153$$

$$z_3 : x_3 > 1172\frac{1}{8} : 153$$

bir kez daha, son açının ikiye bölünmesiyle

$$r : x_4 > 2334\frac{1}{4} : 153$$

$$z_4 : x_4 > 2339\frac{1}{4} : 153$$

ve son bir kez daha aynı işlemi yaparak

$$r : x_5 > 4673\frac{1}{2} : 153$$

bulmaktadır. Dikkat edilirse $2x_5$ uzunluğu, artık, çemberin dışına çizilen düzgün altıgenin bir kenarının uzunluğudur. O halde, çapın, yani $2r$ 'nin, dışarı çizilen bu düzgün doksan altıgenin çevre uzunluğuna, yani $96 \times 2x_5$ sayısına oranı, elbette $(2r : 2x_5) \times (1 : 96)$ olup $(4673\frac{1}{2} : 153) \times (1 : 96) = 4673\frac{1}{2} : 14688$ kesrinden büyük olur. O halde oranları ters çevirirsek söz konusu doksanaltıgenin çevre uzunluğunun çapa oranı $(14688) : (4673\frac{1}{2})$ sayısından ve dolayısıyla $3\frac{1}{7}$ 'den küçüktür, çünkü, 14688 sayısı, $(4673\frac{1}{2}) \times (3\frac{1}{7})$ sayısından küçüktür. Çemberin uzunluğu ise, apaçıktır ki, çemberin dışına çizilen doksanaltıgenin çevre uzunluğundan küçük olduğu için, Arkhimedes böylelikle, çember uzunluğu:çap¡$3\frac{1}{7}$ eşitliğini göstermiş olmaktadır. Arkhimedes daha sonra, bu kez dairenin içine çizilen doksanaltıgenden yararlanarak

$$3\frac{10}{71} < \text{çember uzunluğu : çap}$$

eşitsizliğini elde etmektedir. Perge 'li büyük geometri ustası Apollonios yaklaşık 40 yıl sonra π sayısı için Arkhimedes 'inkinden daha iyi bir yaklaşım verecektir.

VII. Katro Dağındaki Sisam Tüneli

Evet, Van Der Waerden 'den aktarıyoruz: "İyonya ve güney İtalya'daki harika tapınakları (Efes 'teki Artemis tapınağı dünyanın yedi harikasından biriydi) inşa eden mimarlar biraz olsun geometri bilmiyorlar mıydı? Açıkça söyleyelim, bunun yanıtını bilmiyoruz. Romalılarda, matematik bilgisi olmadan görkemli binalar yapılabildiğini görüyoruz. Romalı mimar Vitruvius, bir sütunlu avlunun nasıl inşa edilebileceğini tüm ayrıntılarıyla anlatıyor, fakat burada hiç matematik kullanmıyor. Tek ayrıksı durum, Eski Yunanda Sisam Tünelinin inşaat planlarının matematik hazırlığı hakkında bildiklerimizdir. İ. Ö. 530 dolaylarında, güçlü tiran Polykrates 'in buyruğu ile Eupalinos, Sisam adasındaki Kastro dağının kireş taşı kütlesini delen bir su yolu inşa etmişti. Tarihçi Herodotos bu tünel için şunları yazmaktadır: "Sisamlıların üç yapıtı Helenler arasında kendi örneklerinin en büyükleridir. Birincisi yüzelli kulaç yüksekliğindeki bir dağı delen iki ağızlı bir tüneldir. Tünelin uzunluğu yedi stadion, yükseklik ve genişliği her iki yanda sekizer ayaktır. Tüm tünel boyunca ve onun tamamen içinde kazılmış yirmi arşın derinliğinde üç ayak genişliğinde bir hendek vardır ki, zengin bir kaynaktan elde edilen sular bunun içinden künkler aracılığıyla kente akıtılmaktadır. Bu tüneli inşa eden Naustrophos 'un oğlu Megara 'lı Eupalinos idi." 1882 yılında Alman kazıbilimci E. Fabricius ve ekibi Sisam adasındaki eski yapıtları araştırırken tüneli hiç bozulmamış bir durumda Herodotos 'un betimlediği bir biçimde buldular. Tünelin uzunluğu 1 km, yükseklik ve genişliği 2m olup, içinde künklerin döşenmiş olduğu derin bir oluk ve havalandırma ve molozların temizlenmesi için düşey bacalar ile işçilerin lambalarını koydukları hücreler vardı. Yukarı ucunda 2m aşağı ucunda 8m derinliğinde olan oluk, olasıdır ki tünelin ilk tasarlanan eğiminin sonradan çok az olduğu anlaşıldığı için kazılmıştı. Şimdi en önemli noktaya geliyoruz: Tünelin kazılmasına iki ağızdan birden başlandığı anlaşılmıştır. Her iki yandan kazan işçiler tünelin ortasında yatay olarak 10m, düşey olarak da 3 metreyi bulmayan bir yanılgıyla birleşmişlerdir. Parlak bir başarı! İ. Ö. 700 dolaylarında Yahuda Kralı Ezechias, Kudüs yakınındaki kayalıkların içinde buna benzer bir su yolu geçirtmek istediğinde, işçiler tünelin ilerleme doğrultusundan sapılıp sapılmadığını yukardan yapılan düşey sondajlarla çok ilkel bir biçimde kontrol etmek zorunda kalmışlar ve sonuçta iki ağız arasındaki uzaklığın iki katı uzunluğunda bir zikzak tünel ortaya çıkmıştı. Eupalinos bu işi çok daha iyi başarmıştı ve açmış olduğu tünel neredeyse tam bir doğru biçimindeydi. İskenderiye 'li Heron 'a göre Eupalinos Dioptra adlı bir aygıttan yararlanmıştı. Peki, Eupalinos bu başarıyı nasıl bir yöntem kullanarak gerçekleştirmişti?"

Van Der Waerden, bundan sonra iki sayfa boyunca, Heron 'un, Eupalinos 'un büyük bir olasılıkla yararlandığını düşündüğü geometrik yöntem için verdiği çözümü ayrıntılarıyla anlatmaktadır. Yazıyı daha fazla uzatmamak için bunları aktarmıyoruz.

VIII. Son Söz: Bir Ülküselleştirme

Kurduğu akademide, öğrencilerinden, kendilerini felsefeye adamadan önce adamakıllı matematik öğrenmelerini isteyen Eflatun, **Devlet** adlı yapıtında diyor ki:

> "Aklın görme aygıtı matematik aracılığı ile temizlenir ve ateşe tutulmuşçasına yeni bir yaşam gücüne kavuşur. Öteki uğraşlar ise onu yok etmeye ve onun sayesinde gerçeği görebildiğimiz için canlı kalması bin özdeksel gözden daha fazla gerekli olan akıl gözünü köreltmeye çalışırlar."

KAYNAKLAR

Eski Mısır, Babilonya ve Eski Yunan matematiğinin tarihsel gelişimi konusunda Türkçede tek kapsamlı kaynak *B. L. Van Der Waerden, "Bilimin Uyanışı" (Çev: O. Ş. İçen ve Y. Öner), Türk Matematik Derneği Yayını, İstanbul, 1994* 'tür. Matematikçi olan ya da olmayan ve temel geometri konusunda bilgi edinmek isteyenler için, üç küçük kitapçıktan oluşan *B. V. Kutuzov, Geometri I, II, III (Çev: Hüseyin Demir) Türk Matematik Derneği Yayınları, İstanbul, 1963* kavranması gerçekten kolay, büyük ustalıkla yazılmış küçük bir başyapıttır. Onlarca temel kavramın anlatılıp onlarca teoremin kanıtlandığı bu kitaplarda, bir açının üçe bölünmesi, kübün iki kat kılınması gibi tarih boyunca amatörlerin ilgisini çekmiş bazı tarihsel geometri sorularının, yalnızca pergel ve cetvel kullanarak çözülebilmesinin neden kesinkes olanaksız olduklarının da ayrıntılı kanıtlamalarının yanısıra okurlar Eukleidyen olmayan geometriler konusunu da bulabilirler. Piyasada bulunmayan tüm bu kitapları edinmek isteyenler, İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Vezneciler, 34459-İSTANBUL adresinde Bayan Gülseren Çiçek 'e kişisel olarak ya da mektupla başvurabilirler.

BEŞİNCİ ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYADI BİRİNCİ SEÇME SINAVI

Halil İ. Karakaş-İlham Aliyev-Fikri Gökdal-Doğan Çoker
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü,
07058-Antalya

Matematik Dünyası 'nın 9. cilt, 2. sayısında, Beşinci Antalya Matematik Olimpiyadı Birinci Seçme Sınavının soruları ve cevap anahtarları yayınlanmıştı. Bu sayımızda, söz konusu sınav sorularının kısa çözümlerini veriyoruz. Sorular her iki kategoride de A grubundaki sıralanışlarına göre ele alınacaktır.

Lise I, Soru 1. $(x_1 + x_2 + \cdots + x_{19} + x_{20})^3$ ifadesinin açılımında, benzer terimler toplandıktan sonra ortaya çıkan ifade kaç terimlidir? (Örnek: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ifadesi dört terimlidir.)

A) 1550 B) 1540 C) 1570 D) 400 E) 8000

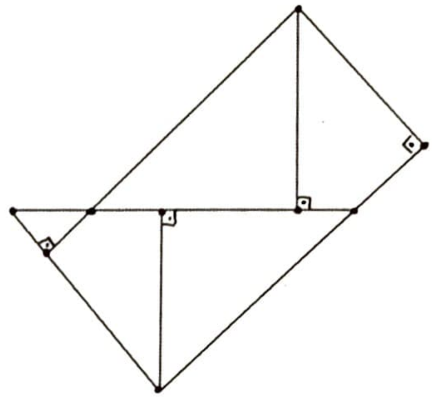
Yanıt. Verilen ifade açılıp benzer terimler (bir araya) toplandıktan sonra, ${x_i}^3$, $(1 \le i \le n)$, biçiminde 20 tane, ${x_i}^2x_j$, $(1 \le i,j \le n)$, $i \ne j$, biçiminde $19.20 = 380$ tane, $x_ix_jx_k$, $(1 \le i,j,k \le n;\ i,j,k$ farklı), biçiminde $\binom{20}{3} = 1140$ tane terim ortaya çıkar. Dolayısıyla, söz konusu ifade, $20 + 380 + 1140 = 1540$ terimlidir. Doğru yanıt, B seçeneğidir.

Lise I, Soru 2. Bir f fonksiyonu her a ve b reel sayıları için $f(a+b) = f(ab)$ ve $f(1999) = 1999$ koşullarını sağlamaktadır. Buna göre, $f(2000)$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) 1999 B) 2000 C) 1000 D) 999 E) hiç biri

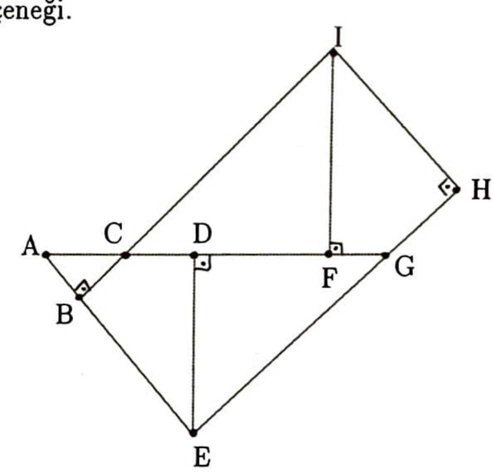
Yanıt. $b = 0$ alınırsa, her a reel sayısı için $f(a) = f(0)$ elde edilir. Bu nedenle, $f(0) = f(2000) = f(1999) = 1999$; doğru yanıt, A seçeneğidir.

Lise I, Soru 3. Aşağıdaki şekilde işaretlenmiş noktaların en az dördünden geçen kaç çember vardır?



A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) en az 4

Yanıt. İşaretlenmiş noktalar aşağıdaki gibi isimlendirilirse, şu dörtlülerin her biri çemberseldir: $ABFI$, $BCDE$, $BIHE$, $FIHG$. Doğru yanıt, E seçeneği.



Lise I, Soru 4. 5, 10, 15, ..., 995, 1000 aritmetik dizisinin tüm terimlerinin çarpımı olan sayının sondan kaç basamağında sıfır bulunur?

A) 200 B) 199 C) 198 D) 197 E) 196

Yanıt. Tüm terimlerin çarpımı,

$$n = (5.1).(5.2).(5.3).\cdots.(5.200) = 5^{200}(200!)\ ,$$

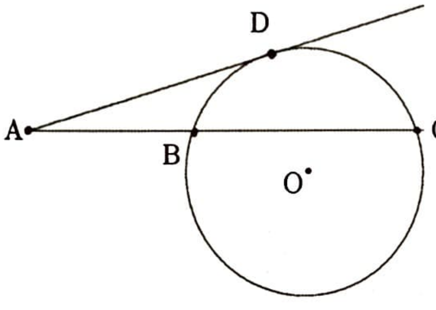
$$200! = 2^k.A;$$

$$k \nmid A \Leftrightarrow k = [\tfrac{200}{2}] + [\tfrac{200}{4}] + [\tfrac{200}{8}] + [\tfrac{200}{16}] + [\tfrac{200}{32}] + [\tfrac{200}{64}] + [\tfrac{200}{128}]$$
$$= 100 + 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 197\ .$$

Böylece, $n = 10^{197}.5^3.A$, $k \nmid A$ $5^3.A$; n 'nin sondan 197 basamağında sıfır vardır. Doğru yanıt, D seçeneğidir.

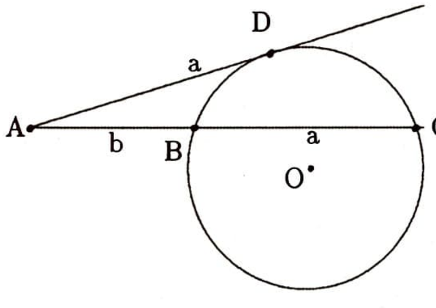
Lise I, Soru 5. Şekilde, O merkezli çemberin D

noktasındaki teğeti ile $[BC]$ kirişinin uzantısının kesişim noktası A 'dır. $|AD| = |BC| = a$ ve $|AB| = b$ ise, $(2b + a)^2$ 'nin a cinsinden değeri nedir?



A) a^2 B) $4a^2$ C) $5a^2$ D) $9a^2$ E) $3a^2$

Yanıt. Kuvvet kuralından, $a^2 = b(a + b) = ba + b^2$, böylece, $(2b+a)^2 = 4b^2+4ab+a^2 = 4(b^2+ab)+a^2 = 4a^2 + a^2 = 5a^2$. Doğru yanıt, C seçeneğidir.



Lise I, Soru 6. 318 sayfalık bir kitabın tüm sayfalarındaki sayfa numaraları kesiliyor; sonra her sayfa numarasının bulunduğu parça, her bir parçada bir rakam bulunacak şekilde kesilerek küçük parçalara ayrılıp, bu küçük parçalar bir torbaya dolduruluyor ve torbadan rasgele bir parça çekiliyor. Çekilen parçadaki rakamın 1 olma olasılığı nedir?

A) $\frac{1}{16}$ B) $\frac{11}{98}$ C) $\frac{19}{94}$ D) $\frac{23}{92}$ E) $\frac{1}{3}$

Yanıt. Kitabın tüm sayfalarındaki sayfa numaralarındaki rakamların sayısı; birler basamağındakiler 318, onlar basamağındakiler $318 - 9 = 309$ ve yüzler basamağındakiler $318 - 99 = 219$ olmak üzere toplam 846 tanedir. Bu rakamlar arasında 1 'lerin sayısı, birler basamağında 32, onlar basamağında 39 ve yüzler basamağında 100 olmak üzere, toplam 171 tanedir. Böylece, çekilen rakamın 1 olma olasılığı $\frac{171}{846} = \frac{19}{94}$, doğru yanıt, C seçeneğidir.

Lise I, Soru 7. Saf asitle dolu olan 54 litrelik bir kaptan bir miktar asit alınıp yerine aynı miktarda su konuyor. Sonra, bu kaptaki karışımdan, ilk alınan miktarda karışım alınıp, yerine su konuyor. Bu işlem tamamlandıktan sonra, kaptaki karışımın 24 litresi saf asit olduğuna göre, birinci defada kaptan kaç litre asit alınmıştır?

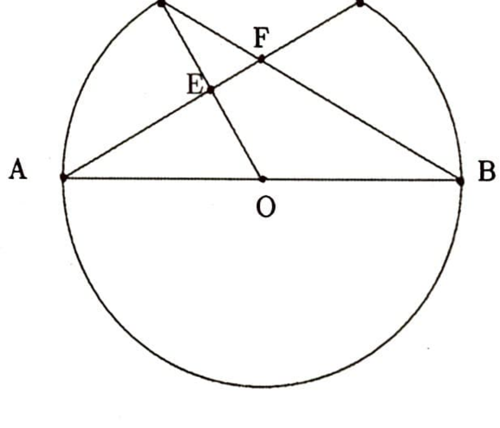
A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

Yanıt. İlk alınan asit miktarı x litre olsun. Bu takdirde,

$$(54 - x) - x.\frac{54 - x}{54} = 24$$

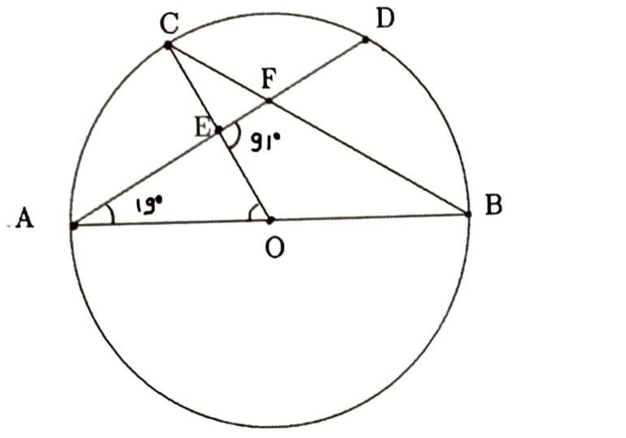
olur. Yukarıdaki ifade sadeleştirilip x 'in azalan kuvvetlerine göre dizilirse, $x^2 - 108x + 1620 = 0$; bu denklemin çözümünden, $x = 18$ veya $x = 90$ olması gerektiği görülür. $x \leq 54$ olduğundan, doğru yanıt, D seçeneğidir.

Lise I, Soru 8. Şekilde, merkezi O ve çapı $[AB]$ olan çember üzerinde C ve D noktaları işaretlenmiş olup, AD ile OC 'nin kesişim noktası E, ve AD ile BC 'nin kesişim noktası F 'dir. $m(E\hat{A}B) = 19^o$, $m(F\hat{E}O) = 91^o$ ise, $m(B\hat{F}D)$ kaç derecedir?



A) 50 B) 55 C) 60 D) 63 E) 65

Yanıt.



Verilenlerden, $m(E\hat{O}A) = 72^\circ$ ve $m(C\hat{B}A) = 36^\circ$ 'dir. Dolayısıyla, $m(B\hat{F}D) = 55^\circ$; doğru yanıt, B seçeneğidir.

Lise I, Soru 9. Her n pozitif tamsayısı için n 'nin en büyük asal çarpanını $A(n)$ ile gösterelim. $a_1 = 68$ ve her $n \geq 1$ için $a_{n+1} = a_n + A(a_n)$ ile tanımlanan $\{a_n\}$ dizisinin 19-uncu terimi kaçtır?

A) 340 B) 371 C) 361 D) 350 E) 380

Yanıt. Dizinin tanımından,

$$\begin{aligned}
a_1 &= 68 = 4.17, \quad A(a_1) = 17; \\
a_2 &= a_1 + 17 = 5.17, \quad A(a_2) = 17; \\
a_3 &= a_2 + 17 = 6.17, \quad A(a_3) = 17; \\
&\vdots \\
a_{15} &= a_{14} + 17 = 18.17, \quad A(a_{15}) = 17; \\
a_{16} &= a_{15} + 17 = 19.17, \quad A(a_{16}) = 19; \\
a_{17} &= a_{16} + 19 = 18.19, \quad A(a_{17}) = 19; \\
a_{18} &= a_{17} + 19 = 19.19, \quad A(a_{18}) = 19; \\
a_{19} &= a_{18} + 19 = 20.19 = 380.
\end{aligned}$$

Doğru yanıt, E seçeneğidir.

Lise I, Soru 10. $p^3 + p^2 + 11p + 2$ ifadesinin asal sayı olmasını sağlayan kaç tane p asal sayısı vardır?

A) 1 B) 2 C) 11 D) sonsuz E) hiç biri

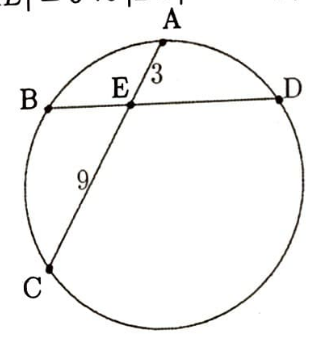
Yanıt. $p^3 + p^2 + 11p + 2$ ifadesi $p = 3$ için $3^3 + 3^2 + 11.3 + 2 = 71$ asaldır. $p \neq 3$ için $p = 3k \mp 1$, $k \geq 1$ biçiminde olur. $p = 3k + 1$ ise, $p^3 + p^2 + 11p + 2 \equiv 1 + 1 + 2 + 2 \equiv 0 \ (mod\ 3)$; $p = 3k - 1$ ise, $p^3 + p^2 + 11p + 2 \equiv -1 + 1 - 2 + 2 \equiv 0 \ (mod\ 3)$ olacağından, $p^3 + p^2 + 11p + 2$ asal olamaz. Doğru yanıt, A seçeneğidir.

Lise I, Soru 11. İçinde 13 kırmızı ve 8 mavi top bulunan bir torbadan rasgele bir miktar top çekiliyor. Çekilen topların en az 6 'sının kırmızı ve en az 4 'ünün mavi olmasını garanti etmek için en az kaç top çekilmelidir?

A) 10 B) 19 C) 17 D) 15 E) 12

Yanıt. En kötü durum, çekilen toplardan ilk 13 tanesinin kırmızı olmasıdır. 4 tane mavi top çekilmesini garanti etmek için en az $13 + 4 = 17$ top çekilmelidir. Doğru yanıt, C seçeneğidir.

Lise I, Soru 12. Şekilde E, çemberin $[BD]$ ve $[CA]$ kirişlerinin kesişim noktası olup, $|BA| = |AD|$ 'dir. $|AE| = 3$ ve $|EC| = 9$ ise, $|AD|$ kaçtır?

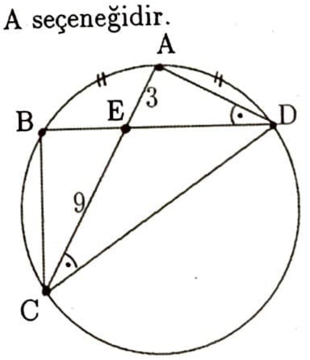


A) 6 B) $2\sqrt{3}$ C) 4 D) $3\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{2}$

Yanıt. Şekilde, $A\overset{\triangle}{D}E \sim A\overset{\triangle}{C}D$;

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AE|}{|AD|} \Rightarrow |AD|^2 = |AE||AC| = 3.12 = 36 .$$

Doğru yanıt, A seçeneğidir.



Lise I, Soru 13. m ve n sayıları 2000 sayısının pozitif bölenleri olmak üzere, (m, n) ikililerini düşününüz. Bu ikililerden kaç tanesi için n sayısı m 'yi tam böler?

A) 200 B) 150 C) 100 D) 60 E) 35

Yanıt.

$$2000 = 2^4.5^3; m = 2^a.5^b, n = 2^c.5^d.$$

$$n \mid m \Leftrightarrow 4 \geq a \geq c \geq 0 \text{ ve } 3 \geq b \geq d \geq 0.$$

Bu koşulları sağlayan tam 15 tane (a, c) ikilisi ve tam 10 tane (b, d) ikilisi vardır. Dolayısıyla, $n \mid m$ olan (n, m) ikililerinin sayısı $15.10 = 150$; doğru yanıt, B seçeneğidir.

Lise I, Soru 14. Hiç bir basamağında sıfır bulunmayan üç basamaklı tam sayılar içinde, basamaklarından biri diğer iki basamağının toplamına eşit olan kaç sayı vardır?

A) 66 B) 75 C) 87 D) 96 E) 108

Yanıt. $\overline{abc}$ üç basamaklı sayısı problemdeki koşulları sağlasın. Aşağıdaki 3 durumdan biri geçerli olacaktır:

(1) $1 \leq a, \quad b \leq 8, a + b = c$

(2) $1 \leq a, \quad c \leq 8, a + c = b$

(3) $1 \leq b, \quad c \leq 8, b + c = a$

Birinci durumda, $2 \leq c \leq 9$ olacak ve her $c = 2, \cdots, 9$ için $\overline{abc}$ 'lerin sayısı $c - 1$; dolayısıyla, tüm $\overline{abc}$ 'lerin sayısı

$$\sum_{c=2}^{9}(c-1) = \sum_{c=1}^{8} c = \frac{8.9}{2} = 36$$

'dır. Diğer iki durumdan elde edilecek $\overline{abc}$ 'lerin sayısı da aynı olacağından, $\overline{abc}$ 'lerin toplam sayısı $3.36 = 108$ 'dir. Doğru yanıt, E seçeneğidir.

Lise I, Soru 15. 369 sayısı bir kaç ardışık doğal sayının toplamı olarak kaç farklı biçimde yazılabilir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

Yanıt. $n \geq 2$ olmak üzere,

$$(k+1) + (k+2) + \cdots + (k+n) = 369$$

olması için gerek ve yeter koşul ,

$$\frac{(2k+n+1)n}{2} = 369 = 3^2.41$$

$$\Leftrightarrow (2k+n+1).n = 2.3^2.41$$

'dir. Bu koşul, n 'nin sadece ve sadece aşağıdaki değerleri için sağlanır: $2, 3, 6, 9, 18$. Doğru yanıt, D seçeneğidir.

Lise I, Soru 16. $x = 11^2 - 12^2 + 13^2 - 14^2 + 15^2 - \cdots - 110^2 + 111^2$ ise, x aşağıdakilerden hangisidir?

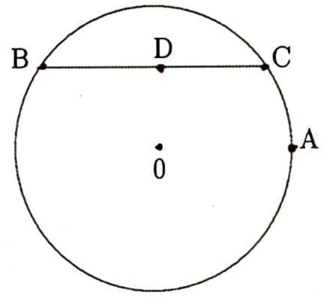
A) 6271 B) 6241 C) 6251 D) 6231 E) 6261

Yanıt.

$$\begin{aligned} x &= 11^2 - 12^2 + 13^2 - 14^2 + 15^2 - \ldots - 110^2 + 111^2 \\ &= 11^2 + (-12^2 + 13^2) + \ldots + (-110^2 + 111^2) \\ &= 11^2 + 25 + 29 + \ldots + 221 \\ &= 121 + \tfrac{25.221}{2}.50 = 6271\ . \end{aligned}$$

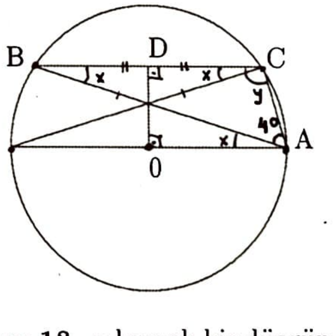
Doğru yanıt, A seçeneğidir.

Lise I, Soru 17. Şekilde O merkezli çemberin, $[BC]$ kirişinin orta noktası D ve bir noktası A 'dır. $m(D\hat{O}A) = 90^o$ ve $m(B\hat{A}C) = 40^o$ ise, $m(A\hat{B}C)$ kaç derecedir?



A) 50 B) 45 C) 30 D) 25 E) 20

Yanıt. $m(A\hat{B}C) = x$, $m(A\hat{C}B) = y$ olsun. $[OD] \perp BC$ olduğundan, $m(O\hat{A}B) = x$ olur. Şekilden de izlenebileceği gibi, $y + x = 140$, $y - x = 90$; ve sonuç olarak $x = 25$ 'tir. Doğru yanıt, D seçeneğidir.



Lise I, Soru 18. n kenarlı bir düzgün (dışbükey) çokgenin bir iç açısının 3 katı, m kenarlı bir düzgün (dışbükey) çokgenin bir iç açısının 4 katına eşit ise, $(m + n)$ sayısı aşağıdakilerden hangisi **olamaz**?

A) 49 B) 25 C) 24 D) 15 E) 10

Yanıt. n kenarlı düzgün (dışbükey) çokgenin bir iç açısı $(180 - \frac{360}{n})$ derecedir. Böylece,

$$3(180 - \frac{360}{n}) = 4(180 - \frac{360}{m}),$$

bu denklem sadeleştirilince,

$$\frac{8}{m} - \frac{6}{n} = 1;$$

ya da

$$n = \frac{6m}{8-m} = \frac{-(48-6m)+48}{8-m} = -6 + \frac{48}{8-m}$$

elde edilir. Buradan, arzu edilen (n, m) ikililerinin ($n > m \geq 2$ olduğu da gözönüne alınarak) $(6,4)$, $(10,5)$, $(18,6)$, $(42,7)$ 'den ibaret olduğu görülür. Doğru yanıt, B seçeneğidir.

Lise I, Soru 19. 8 şeker kutusunun her birinde farklı sayıda şeker bulunmaktadır. Bu kutulardan rasgele biri boşaltılıp diğer kutulara uygun biçimde dağıtılınca, diğer 7 kutunun her birindeki şeker sayısı aynı oluyor. Başlangıçta en çok şeker bulunan kutuda en az şeker vardır?

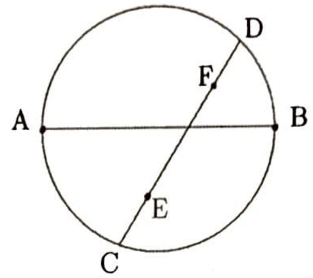
A) 18 B) 24 C) 28 D) 32 E) 36

Yanıt. Kutulardaki şeker sayısı, sırasıyla

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8$$

olsun. Birinci kutudaki şekerler boşaltılıp diğerlerine paylaştırılarak diğer 7 kutudaki şekerlerin sayısı eşitlenirken, 7-inci kutuya en az 1 şeker; 6-ıncı kutuya en az 2 şeker; 5-inci kutuya en az 3 şeker; 4-üncü kutuya en az 4 şeker, 3-üncü kutuya en az 5 şeker ve 2-inci kutuya en az 6 şeker konması gerekeceğinden, $a_1 \geq 1+2+3+4+5+6 = 21$ 'dir. Dolayısıyla, $a_8 \geq 28$ 'dir. $a_8 = 28$ olan dağılım vardır: 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28. Doğru yanıt, C seçeneğidir.

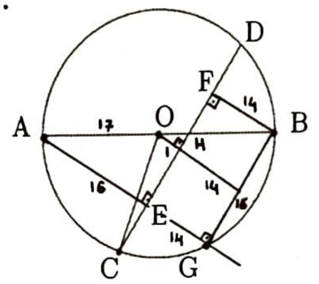
Lise I, Soru 20. Şekilde, $[AB]$ çaplı çemberin bu çapını kesen bir kirişi $[CD]$; A ve B 'den $[CD]$ kirişine indirilen dikmelerin ayakları, sırasıyla E ve F 'dir. $|AE| = 16$, $|BF| = 14$, ve $|AB| = 34$ ise, $|FD|$ aşağıdakilerden hangisidir?



A) $4(2\sqrt{2}+1)$ B) $3(4\sqrt{2}-1)$ C) $4\sqrt{7}$

D) $2(3+\sqrt{2})$ E) $4(3\sqrt{2}-2)$

Yanıt.



$[AE$ 'nin çemberi kestiği diğer nokta G olsun. $EGBF$ bir dikdörtgendir.

$$|GB|^2 = 34^2 - 30^2 = 4.64 \Rightarrow |GB| = 16.$$

Şekilde, $|OH| = 1$ olduğu kolayca görülebilir. $|FD| = x$ diyelim. Bu takdirde, $x = |CE|$ ve

$$(x+8)^2 + 1 = 17^2,\ x^2 + 16x + 65 = 289\ ,$$

$$x^2 + 16x - 224 = 0\ , \quad x = -8 \mp \sqrt{64+224}\ ;$$

$x > 0$ olacağından, $x = -8 + \sqrt{288} = 4(3\sqrt{2} - 2)$ olduğu görülür. Doğru yanıt, E seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 1. Lise I, Soru 15 ile aynıdır.

Lise II-III, Soru 2. a, b, $c \in \mathbf{Z}$ olmak üzere, $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin diskrimantının 47 olmasını sağlayan kaç tane (a, b, c) üçlüsü vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 47 E) sonsuz

Yanıt. $b^2 - 4ac = 47$ koşulunu sağlayan hiç (a, b, c) tamsayı üçlüsü yoktur; çünkü , $b^2 - 4ac \equiv 1 \pmod 4$ olduğu halde $47 \not\equiv 1 \pmod 4$ 'tür. Doğru yanıt, A seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 3. m ve n sayıları 2520 sayısının pozitif bölenleri olmak üzere, (m, n) ikililerini düşününüz. Bu ikililerden kaç tanesi için n sayısı m 'yi tam böler?

A) 270 B) 540 C) 250 D) 455 E) 500

Yanıt.

$2520 = 2^3.3^2.5.7; m = 2^a3^b5^c7^d, n = 2^x.3^y.5^z.7^t.$

$$n \mid m \Leftrightarrow 3 \geq a \geq x \geq 0,\ 2 \geq b \geq y \geq 0,$$

$$1 \geq c \geq z \geq 0\ ,\ 1 \geq d \geq t \geq 0.$$

Bu koşulları sağlayan tam 10 tane (a, x) ikilisi; tam 6 tane (b, y) ikilisi; tam 3 tane (c, z) ikilisi ve tam 3 tane (d, t) ikilisi vardır. Dolayısıyla, $n|m$ olan (n, m) ikililerinin sayısı 10.6.3.3 = 540 'tır; doğru yanıt, B seçeneğidir.

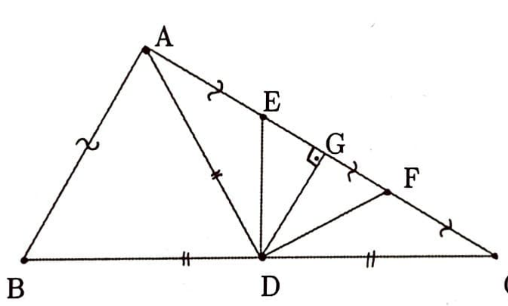
Lise II-III, Soru 4. $\overset{\triangle}{ABC}$ bir dik üçgen, $m(\hat{A}) = 90^o$, $[BC]$ 'nin orta noktası D; $[AC]$ 'nin bir noktası E olmak üzere, $|AB| = |AE|$ ve $|AC| = 3|AB|$ ise, $m(A\hat{E}D)$ kaç derecedir?

A) 105 B) 120 C) 135 D) 140 E) 150

Yanıt. D 'den EF 'ye inilen dikmenin ayağı G olsun. G, $[EF]$ 'nin orta noktası; benzerlikten,

$$|DG| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}|EF| = |EG| = |FG|$$

'dir. Dolayısıyla, $m(D\hat{E}G) = 35^o$, $m(A\hat{E}D) = 135^o$ 'dir. Doğru yanıt, C seçeneğidir.



Lise II-III, Soru 5. 30 farklı kitap, her bir bölmesi 30 kitap alabilen 7 bölmeli bir rafa kaç değişik biçimde dizilebilir? (Bazı bölmeler boş kalabilir.)

A) $\binom{30}{7}$ B) 23! C) $\frac{36!}{6!}$ D) $\frac{37!}{7!}$ E) $\frac{30!}{7!}$

Yanıt. 30 kitaba $7 - 1 = 6$ defter ekleyerek, 6 'sı aynı 30 'u farklı olan 36 nesnenin (tekrarlı) permütasyonlarını saymalıyız. Doğru yanıt, C seçeneğindeki $\frac{36!}{6!}$ 'dir.

Lise II-III, Soru 6. Tüm pozitif tamsayılardan oluşan küme **N** ile gösterilmek üzere, $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ fonksiyonu

(i) m ve n aralarında asal olunca, $f(mn) = f(m)f(n)$;

(ii) p ve q asal olunca, $f(p+q) = f(p) + f(q)$

özelliklerine sahipse, $f(100)$ kaçtır?

A) 29 B) 50 C) 70 D) 125 E) hiç biri

Yanıt 1. (i) özelliğinden, $f(3+3) = f(3.2) = f(3)f(2)$, (ii) özelliğinden ise, $f(3+3) = f(3) + f(3) = f(3).2$ ve böylece, $f(2) = 2$ olduğu görülür. Tekrar (ii) özelliği kullanılarak $f(4) = f(2+2) = f(2) + f(2) = 2 + 2 = 4$; ve benzer biçimde,

$$f(5) = f(2{+}3) = 2{+}f(3), f(7) = f(2{+}5) = 4{+}f(3)$$

ve buradan,

$$f(12) = f(5+7) = f(5) + f(7) = 6 + 2f(3)\ (*)$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$f(12) = f(4.3) = f(4)f(3) = 4.f(3) \qquad (**)$$

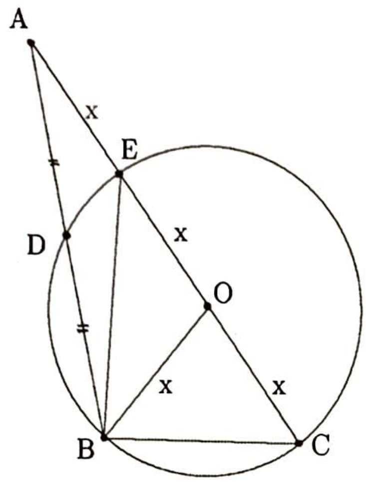
'tür. $(*)$ ve $(**)$ 'dan, $f(3) = 3$ olduğu görülür. Böylece, $f(5) = 5$ ve $f(7) = 7$ olduğu görülür. Şimdi, $f(28) = f(5+23) = 5 + f(23) = f(4.7) = 28$ ve sonuç olarak, $f(23) = 23$ tür. O halde, $f(25) = f(2+23) = 25$, $f(100) = f(4.25) = 100$ 'dür. Doğru yanıt, E seçeneğidir.

Yanıt 2. $f(4) = 4$ ve $f(100) = f(4.25) = f(4).f(25) = 4.f(25)$ 'ten $f(100)$ 'ün 4 ile tam bölündüğü görülür. Dolayısıyla, doğru yanıt E seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 7. Bir $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin $[AB]$ kenarının orta noktası D ile; D, B ve C noktalarından geçen çemberin $[AC]$ kenarı ile (ikinci defa) kesişim noktası E ile gösterilmek üzere, $|AC| = 3|AE|$ ve $m(E\hat{B}C) = 90^o$ ise, $|EB|^2/|BC|^2$ aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{3}{7}$ E) 2

Yanıt.



$|AE| = x$; D, B ve C 'den geçen çemberin merkezi O olsun. Bu takdirde, $|EO| = |OC| = x$ 'dir. $|AD| = |DB| = y$ olsun. Kuvvet kuralından, $2y^2 = 3x^2$ 'dir. $m(A\hat{E}B) = \alpha$ olsun. $\overset{\triangle}{AEB}$ ve $\overset{\triangle}{BED}$ üçgenlerine kosinüs kuralı uygulanarak,

$$\begin{aligned} 4y^2 &= x^2 + |EB|^2 + 2x|EB|\cos\alpha, \\ x^2 &= x^2 + |EB|^2 + 2x|EB|\cos(180-\alpha) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanarak

$$4y^2 + x^2 = 2x^2 + 2|EB|^2$$

ve buradan,

$$|EB|^2 = 4y^2 - x^2 = 4.\frac{3}{2}x^2 - x^2 = \frac{5}{2}x^2$$

elde edilir. $\overset{\triangle}{EBC}$ dik üçgeninden,

$$|BC|^2 = 4x^2 - |EB|^2 = (4 - \frac{5}{2})x^2 = \frac{3}{2}x^2;$$

böylece, $\frac{|EB|^2}{|BC|^2} = \frac{5}{3}$ 'tür. Doğru yanıt, B seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 8.

$$\left\{ \begin{array}{l} y^2 - (x+1)(x^2+4) = 0 \\ y^2 - (4-2x)y + (4 - 4x - 3x^2) = 0 \end{array} \right\}$$

denklem sisteminin çözüm kümesinde kaç (x, y) reel sayı ikilisi vardır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 3 'ten fazla

Yanıt. İkinci denklem,

$$\begin{aligned} y^2 &= (4-2x)y + (4 - 4x - 3x^2), \\ &= (y - (2-3x))(y - (2+x)) = 0 \end{aligned}$$

biçiminde çarpanlarına ayrılabilir. Dolayısıyla, $y = 2 - 3x$ veya $y = 2 + x$ 'tir.

$$\begin{aligned} y = 2 - 3x \quad &\Rightarrow \quad y^2 = (x+1)(x^2+4) \\ &\Rightarrow \quad (2-3x)^2 = (x+1)(x^2+4) \\ &\Rightarrow \quad 4 - 12x + 9x^2 = x^3 + x^2 + 4x + 4 \\ &\Rightarrow \quad x^3 - 8x^2 + 16x = 0 \\ &\Rightarrow \quad (x-4)^2.x = 0 \Rightarrow \\ & \quad x = 0 \text{ veya } x = 4 \\ &\Rightarrow \quad (x,y) = (0,2) \text{ veya } (x,y) = (4,-8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = 2 + x \quad &\Rightarrow \quad (2+x)^2 = (x+1)(x^2+4) \\ &\Rightarrow \quad x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ &\Rightarrow \quad (x,y) = (0,2) \end{aligned}$$

Doğru yanıt, C seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 9. a_1 ve her $n \geq 1$ için

$$a_{n+1} = \frac{1}{n}(1 + 2a_1 + 3a_2 + \cdots + (n+1)a_n)$$

ile tanımlanan dizinin 2000-inci terimi aşağıdakilerden hangisidir?

A) 3.2^{1998} B) 3.2^{1999} C) 3.2^{1997} D) 3.2^{2000}

E) 3.2^{2001}

Yanıt. $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2-1}(1+2) = 3$, $a_3 = \frac{1}{2}(1+2+9) = 6$ ve $n > 2$ için

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{n}(1 + 2a_1 + \cdots + na_{n-1} + (n+1)a_n) \\ &= \frac{1}{n}((n-1)a_n + (n+1)a_n) \\ &= \frac{1}{n}(2na_n) = 2a_n; \end{aligned}$$

dolayısıyla, $n > 2$ için

$$a_{n+1} = 2^{n-1}.a_2 = 3.2^{n-1}; \quad a_{2000} = 3.2^{1998}$$

'dir. Doğru yanıt, A seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 10. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2000}$ denkleminin tamsayılar kümesinde kaç çözümü vardır?

A) 5 B) 21 C) 16 D) 10 E) 40

Yanıt.

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2000}=20\sqrt{5}\ ,$$

$$x=y-40\sqrt{5y}+2000\in \mathbf{Z}$$

olacağından, $y=5s^2$, $s\geq 0$ olmalıdır. Benzer şekilde, $x=5t^2$, $t\geq 0$ olmalıdır. Bu değerler denklemde yerleştirilirse,

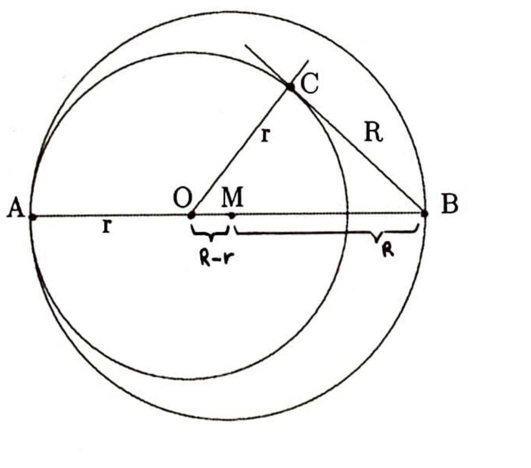
$$t\sqrt{5}+s\sqrt{5}=20\sqrt{5}\ ,\ t+s=20$$

elde edilir. Son denklemin tam 21 tane (t,s) çözümü vardır. Dolayısıyla, verilen denklemin tam 21 tane tamsayı çözümü vardır; doğru yanıt, B seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 11. Yarıçapı r olan çember, yarıçapı R olan çembere A noktasında içten teğettir. Dıştaki çemberin herhangi bir B noktasından içteki çembere çizilen teğetin değme noktası C ve $2|BC|=|BA|$ ise, $\frac{r}{R}$ nedir?

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{7}{10}$ E) $\frac{11}{20}$

Yanıt. $\overset{\triangle}{OCB}$ dik üçgeninde,



$$(2R-r)^2=r^2+R^2\ ,\ 4R^2-4rR+r^2=r^2+R^2\ ,$$

$$3R^2=4Rr\ ,\ \frac{r}{R}=\frac{3}{4}\ .$$

Doğru yanıt, A seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 12. Lise I, Soru 19 ile aynıdır.

Lise II-III, Soru 13. Aşağıdaki denklemin kaç reel çözümü vardır?

$$x=1-2(1-2x^2)^2$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Yanıt. $1-2x^2=t$ diyelim. Bu takdirde, $x=1-2t^2$ olur. Böylece elde edilen

$$1-2x^2=t\ ;\quad 1-2t^2=x$$

sisteminden

$$t-x=2(t^2-x^2)\ \Rightarrow\ (t-x)(1-2t-2x)=0$$
$$\Rightarrow\ t=x\ \text{ veya }\ t=\frac{1}{2}-x$$

elde edilir. Bu durumda,

$$t=x\Rightarrow 1-2x^2=x\Rightarrow 2x^2+x-1=0 \qquad (1)$$

$$t=\tfrac{1}{2}-x\Rightarrow 1-2x^2=\tfrac{1}{2}-x\Rightarrow 4x^2-2x-1=0 \quad (2)$$

(1) ve (2) denklemlerinin birbirinden farklı ikişer kökü; dolayısıyla, verilen denklemin 4 farklı çözümü vardır. Doğru yanıt, E seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 14. Her $x\in[-1,1]$ için $|2x^2+ax+b|\leq 1$ eşitsizliğinin sağlanmasını garanti eden reel a ve b sayıları için a^2+b^2 aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

Yanıt. $-1\leq 2x^2+ax+b\leq 1$ 'de $x=0$, $x=1$ ve $x=-1$ yerleştirilirse, sırasıyla,

(1) $-1\leq b\leq 1$

(2) $-3\leq a+b\leq -1$

(3) $-3\leq b-a\leq -1$;

(2) ve (3) 'ten,

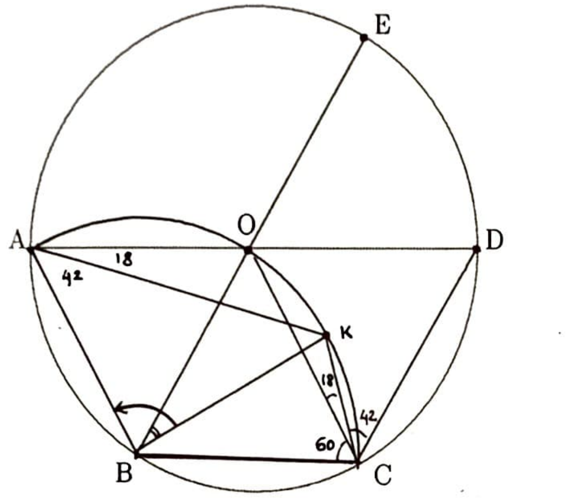
(4) $-3\leq b\leq -1$;

(1) ve (4) 'ten $b=-1$ elde edilir. Şimdi, (2) 'den, $-2\leq a\leq 0$ ve (3) 'ten $-2\leq -a\leq 0$ ve böylece, $a=0$ elde edilir. Sonuç olarak, $a^2+b^2=1$; doğru yanıt, B seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 15. $ABCDEF$ düzgün altıgeni veriliyor. $ABCD$ dörtgeninin iç bölgesinde alınan bir K noktası için $m(K\hat{A}D)=18^o$ ve $m(K\hat{A}B)=m(K\hat{C}D)$ ise, $m(K\hat{B}A)$ kaç derecedir?

A) 84 B) 81 C) 94 D) 96 E) 72

Yanıt.



Şekilden izlenirse, altıgenin bir iç açısı 120^o olduğundan, $m(K\hat{B}A) = m(K\hat{C}D) = 42^o$; $m(K\hat{C}O) = 18^o$ dir. Bu durumda; A, O, K, C noktaları, merkezi B 'de olan çember üzerindedir. Dolayısıyla, $m(K\hat{B}O) = 2m(K\hat{A}O) = 36^o$ 'dir. $m(O\hat{B}A) = 60^o$ olduğundan, $m(K\hat{B}A) = 96^o$; doğru yanıt, D seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 16. $a_3 = 3$ ve her $n \geq 1$ için $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ bağıntısı ile tanımlanmış bir $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ dizisinin ilk 100 teriminin toplamı 100 ise, ilk 111 teriminin toplamı kaçtır?

A) 100 B) 111 C) 136 D) 194 E) 222

Yanıt.

$$a_{n+3} = a_{n+2} - a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) - a_{n+1} = -a_n ;$$

ve böylece, verilen dizinin herhangi altı ardışık numaralı teriminin toplamının sıfır olduğu görülür. O halde,

$$100 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$= a_2 + a_3 = a_2 + 3 ;$$

buradan; $a_2 = 97$, $a_1 = a_2 - a_3 = 97 - 3 = 94$;

$$111 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{111} = a_1 + a_2 + a_3$$

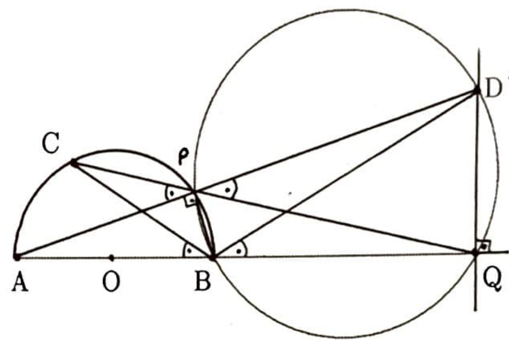
$$= 94 + 97 + 3 = 194 .$$

Doğru yanıt, D seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 17. $[AB]$ çaplı yarım çemberin AB yayının orta noktası C; BC yayı üzerinde B ve C 'den farklı bir nokta P; CP ile AB doğrusunun kesişim noktası Q; Q 'dan geçen ve AB doğrusuna dik olan doğru ile AP 'nin kesişim noktası D olmak üzere, $|AB| = 6$ ve $|DQ| = 10$ ise, $|QP|.|QC|$ nedir?

A) 160 B) 169 C) 150 D) 140 E) 144

Yanıt.



Şekilden izlenebileceği üzere; B, P, D, Q noktaları çemberseldir. Aynı yayı gören açılar olduğundan, $m(A\hat{P}C) = m(A\hat{B}C)$; ters açılar ve aynı yayı gören açılar olarak, $m(A\hat{B}C) = m(A\hat{P}C) = m(Q\hat{P}D) = m(Q\hat{B}D)$. Buradan, $m(C\hat{B}D) = 90^o$, $m(Q\hat{B}D) = 45^o$, $|BQ| = |QD| = 10$ olduğu görülür. Böylece, kuvvet kuralı ile,

$$|QP|.|QC| = 10.16 = 160$$

olduğu görülür. Doğru yanıt, A seçeneğidir.

Lise II-III, Soru 18. Lise I, Soru 3 ile aynıdır.

Lise II-III, Soru 19. Lise I, Soru 9 ile aynıdır.

Lise II-III, Soru 20. $a_n = \frac{n^2}{(1,001)^n}, (n = 1, 2, 3, \ldots)$ dizisinin en büyük terimi kaçıncı terimdir?

A) 1001 B) 1999 C) 2000 D) 2001 E) 2002

Yanıt.

$$\begin{aligned} a_n > a_{n+1} &\Leftrightarrow \frac{n^2}{(1,001)^n} > \frac{(n+1)^2}{(1,001)^{n+1}} \\ &\Leftrightarrow (1,001)n^2 > (n+1)^2 \\ &\Leftrightarrow 1001n^2 > 1000(n+1)^2 \\ &\Leftrightarrow n^2 - 2000n > 1000 \\ &\Leftrightarrow (n-2000)n > 1000 \\ &\Leftrightarrow n \geq 2001 \end{aligned}$$

olduğundan, en büyük terim 2001-inci terimdir. Doğru yanıt, D seçeneğidir.

MÜKEMMEL SAYILAR

Halil İ. Karakaş
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA

Küçük yaşlardan beri aşina olduğumuz en basit matematiksel kavramlardan biri sayma sayıları ya da pozitif tamsayılardır. Bu sayıların çok basit bir kuralla, 1 'in ardarda toplanmasıyla üretildikleri düşünülebilir. Bununla beraber, bu sayılardan her birinin, o sayıya özel bir konum sağlayan ilginç özellikleri vardır. Binyıllarca öncesinin matematikçileri bu tür özellikleri keşfetmek için uğraş vermişlerdir ki, onların aritmetik olarak adlandırılan çalışmaları bugünün sayılar teorisinin temelini oluşturmaktadır.

Aritmetik problemlerinin pek çoğunun ifadesi şaşkınlık yaratacak derecede basit, fakat çözümleri ifadedeki basitlikle ters orantılı olarak zordur. Bu problemlere örnek olan "Fermat" 'ın son teoremi ve "Goldbach Sanısı" (conjecture) neredeyse sokakta rastladığımız her insanın anlayabileceği ifadelere sahiptir.

Henüz çözülememiş pek çok probleme konu olan ve bin yıllardır ilgi çeken sayı türlerinden biri de bu yazımıza konu teşkil eden mükemmel sayılardır.

Kendisinden küçük tüm pozitif bölenlerinin toplamına eşit olan bir (pozitif) tamsayıya **mükemmel sayı** denir. **Öklid** 'in "Elementler" 'inde (VII, VIII ve IX. kitaplar) yer verilen mükemmel sayılarla doğulu matematikçilerden **Ibn-el Heitham** ve ünlü **L. Euler** gibi pek çok matematikçi ilgilenmiştir. Öklid 'in kitabında çift mükemmel sayılar için (o zaman her mükemmel sayının çift olduğu düşünülüyordu...) bir algoritma verilmiştir. Ibn-el Heitham' ın da üzerinde çalıştığı ve Euler tarafından ispatlanan bu algoritma, yazımız içinde açıklanacaktır.

Mükemmel sayılarla ilgilenmiş olan eski matematikçilerden biri de Gerassa 'lı Nikomakus (Nicomachus) 'tur. Nikomakus, **Introductio Arithmetica** adlı kitabında üç tür sayıdan bahseder: Eksik (deficient) sayılar, mükemmel (perfect) sayılar ve artık (abundant) sayılar. Bir sayının kendisinden küçük tüm pozitif bölenlerinin toplamı o sayıdan küçük ise, o sayıya bir eksik sayı; eğer bu toplam o sayıdan büyük ise, sözü edilen sayıya bir artık sayı denir. Başka bir deyimle, artık sayılar, pek çok pozitif bölene sahip olan; eksik sayılar ise, pozitif bölen yönünden fakir olan sayılardır. Mükemmel sayılar, bu iki çeşit sayı arasında bir tür denge ifade etmektedir. 2 'nin her pozitif kuvveti (örneğin 2, 4...) bir eksik sayı, 6 bir mükemmel sayı ve 12 bir artık sayıdır.

Mükemmel sayılar hakkında eski çağlardan beri süregelen ilgi nereden kaynaklanmaktadır? Bu ilgi, mükemmel sayılarla ilgili bilgilerin sağlayabileceği pratik faydalar veya başka problemlerin çözümüne sağlayacağı katkılardan çok kendi içindeki harmoni ve güzellikten kaynaklansa gerektir.

Nikomakus, "Introductio Arithmetica" adlı kitabında aşağıdaki iddialarda bulunmuştur:

1. Her $i \geq 0$ için 10^i ile 10^{i+1} arasında bir ve yalnız bir mükemmel sayı vardır.

2. Her mükemmel sayı çifttir.

3. Her mükemmel sayı (dönüşümlü olarak) ya 6 veya 8 ile biter.

4. Her mükemmel sayı, uygun bir $t \geq 1$ için $2^t(2^{t+1} - 1)$ biçimindedir.

5. Sonsuz çoklukta mükemmel sayı vardır.

Nikomakus'un bu beş iddiadan hiçbirini tam olarak kanıtlamadığı anlaşılmaktadır. Bu iddialardan (1) ve (3) 'ün yanlış olduğu bilinmektedir. Zira, 10000 ile 10000000 arasında hiçbir mükemmel sayı bulunmamakta ve beşinci mükemmel sayı ile altıncı mükemmel sayının son basamaklarında 6 bulunmaktadır. Diğer üç iddia ne ispatlanabilmiş ne de çürütülebilmiştir. Ancak, daha önce belirtildiği gibi, (4) 'te verilen iddianın çift mükemmel sayılar için doğru olduğu Euler tarafından ispatlanmıştır.

Bundan sonraki tartışmalarımızda kolaylık sağlaması bakımından, bir n sayısının tüm pozitif bölenlerinin toplamını $\sigma(n)$ ile göstereceğiz. Bu gösterimle, n'nin mükemmel olması için gerek ve yeter koşul; $\sigma(n) - n = n$, ya da buna denk olarak, $\sigma(n) = 2n$ olmasıdır. (Euler, mükemmel sayıyı böyle tanımlamıştır.)

Bu şekilde tanımlanan σ fonksiyonunun çarpımsal olduğu; yani, m ve n aralarında asal ise, $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$ olduğu bilinmektedir ([2], sayfa 95).

Şimdi, her çift mükemmel sayının uygun bir $t \geq 1$ için $2^t(2^{t+1} - 1)$ biçiminde olduğu önermesi için Euler 'in verdiği ispatı görelim.

$2^{t+1} - 1$ biçimindeki sayılara **Mersenne sayıları** denir. Euler 'in ispatında da görüleceği gibi, s tek ve $t \geq 1$ olmak üzere $2^t.s$ biçiminde bir çift sayının mükemmel olması için gerek ve yeter koşul, $s = 2^{t+1} - 1$ ve s 'nin asal (Mersenne asalı) olmasıdır. Dolayısıyla, çift mükemmel sayıların varlığı, Mersenne asallarının varlığına denktir. Mersenne asallarının sonlu mu yoksa sonsuz çoklukta mı olduğu bilinmemektedir.

$2^t s$, $t \geq 1$, sayısının mükemmel olduğunu kabul edelim. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \sigma(2^t s) = 2^{t+1}s \quad &\Rightarrow \quad \sigma(2^t)\sigma(s) = 2^{t+1}s \\ &\Rightarrow \quad (2^{t+1} - 1)\sigma(s) = 2^{t+1}s \\ &\Rightarrow \quad (2^{t+1} - 1),\ s \text{ yi böler ve } \sigma(s) = 2^{t+1}\frac{s}{2^{t+1} - 1} \qquad (*) \end{aligned}$$

'dir. $s = c \cdot (2^{t+1} - 1)$, $c \geq 1$ olsun. O zaman, $(*)$ 'dan,

$$c \cdot 2^{t+1} = \sigma(s) = \sigma(c \cdot (2^{t+1} - 1)) \geq c \cdot \sigma(2^{t+1} - 1)$$

ve buradan

$$2^{t+1} \geq \sigma(2^{t+1} - 1) \qquad (**)$$

olduğu görülür. Eğer $2^{t+1} - 1$ asal değil ise,

$$\sigma(2^{t+1} - 1) > 2^{t+1}$$

olacağından, $(**)$ 'ın ancak $2^{t+1} - 1$ 'in asal olması durumunda ve eşitlik olarak sağlanması gerektiği görülür. Diğer taraftan, $c = 1$ olmak zorundadır; çünkü $c > 1$ olması durumunda

$$\begin{aligned} \sigma(s) = \sigma(c \cdot 2^{t+1}) &= 1 + c + (2^{t+1} - 1) + c \cdot (2^{t+1} - 1) \\ &= 2^{t+1} + c \cdot 2^{t+1} > c \cdot 2^{t+1} \end{aligned}$$

olur ki, bu, $(*)$ ile çelişir. Sonuç olarak, $2^t \cdot s$ mükemmel ise, s asal ve $s = 2^{t+1} - 1$ 'dir. Karşıt olarak, $2^{t+1} - 1$ asal ise,

$$\begin{aligned} \sigma(2^t(2^{t+1}-1)) &= \sigma(2^t)\sigma(2^{t+1}-1) \\ &= (2^{t+1}-1)\cdot 2^{t+1} = 2(2^t(2^{t+1}-1)) \end{aligned}$$

olur ve $2^t(2^{t+1} - 1)$ 'in mükemmel olduğu görülür.

Çift mükemmel sayılar için kanıtlanan bu algoritma, çift mükemmel sayıların miktarı hakkında fazla bir şey ifade etmemektedir. Daha önce de belirtildiği gibi, bu doğrultuda bilinenler, Mersenne asalları hakkında bilinenler kadardır. $2^{t+1} - 1$ 'in asal olması için $(t + 1)$ 'in asal olması gerektiği (fakat yetmediği) bilinmektedir. $2^p - 1$ 'in asal olduğu p asal sayılarından bazıları şunlardır:

2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217,

4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701, 23209, 44497, ..., 216091, ...

Yukarıdaki listeden de görülebileceği üzere, çift mükemmel sayılar hızla büyümektedir. Örneğin, listede görülen son Mersenne asalına karşılık gelen

$$2^{216090}(2^{216091} - 1)$$

mükemmel sayısının ondalık ifadesi neredeyse dergimizin bir sayısının tüm sayfalarını dolduracak büyüklüktedir.

Tek mükemmel sayılara gelince... Böyle bir sayının var olup olmadığı henüz bilinmemektedir. Eğer böyle bir sayı varsa, bu sayının 10^{200} 'den büyük olması gerektiği ve farklı asal çarpanlarının sayısının 8 'den az olamayacağı ispatlanmıştır.

Tek mükemmel sayıların mevcut olduğunu farzedelim ve

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

bir tek mükemmel sayının asal ayrışımı olsun. Burada her bir asal çarpanın tek (çift değil) olduğu ve

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{\alpha_1})\sigma(p_2^{\alpha_2})\cdots\sigma(p_r^{\alpha_r}) = 2n = 2p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$$

olacağı açıktır. Her p asal sayısı ve $\alpha \geq 1$ için

$$\sigma(p^\alpha) = 1 + p + \ldots + p^{\alpha-1} + p^\alpha$$

sayısı α tek olunca çift ve α çift olunca tek olduğundan, n 'nin asal çarpanlara ayrılışında $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ üslerinden bir tanesi tek ve geri kalanların hepsi çift olmalıdır. Gerekisirse sıralamayı değiştirerek α_1 'in tek olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda, $\sigma(p_1^{\alpha_1})$ çift, her $i \geq 2$ için $\sigma(p_i^{\alpha_i})$ tek olur; $p_1 = 4k + 1$, $k \geq 1$ ve $\alpha_1 = 4\beta + 1$, $\beta \geq 0$ olacağı da gösterilebilir. Gerçekten, bir tek sayı olan α_1 ya $4\beta + 1$ veya $4\beta - 1$, $\beta \geq 0$ biçimindedir. Eğer $\alpha_1 = 4\beta - 1$ olsaydı,

$$\begin{aligned} \sigma(p_1^{\alpha_1}) &= 1 + p_1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{4\beta-1} \\ &= (1 + p_1^2 + \ldots + p_1^{4\beta-2}) + (p_1 + p_1^3 + \ldots + p_1^{4\beta-1}) \\ &= (1 + p_1)(1 + p_1^2 + p_1^4 + \ldots + p_1^{4\beta-2}) \end{aligned}$$

ifadesinde çarpanların ikisi de çift olacağından (ikinci çarpanda tam 2β tane tek toplanan olduğuna dikkat ediniz), $\sigma(n)$ 'nin 4 'ün katı olması gerekirdi ki, bu, $\sigma(n) = 2n$ olması ile çelişirdi. Böylece, $\alpha_1 = 4\beta + 1$; $\beta \geq 0$, olduğunu görmüş oluyoruz. Diğer yandan,

$$\begin{aligned} \sigma(p_1^{4\beta+1}) &= 1 + p_1 + p_1^2 + ... + p_1^{4\beta+1} \\ &= (1 + p_1)(1 + p_1^2 + p_1^4 + ... + p_1^{4\beta}) \end{aligned}$$

ifadesinde, eğer $p_1 = 4k - 1$, $k \geq 1$ olsaydı, son ifadeden anlaşılacağı üzere $1 + p_1 = 4k$ ve dolayısıyla, $\sigma(n)$ 'nin 4 'ün bir katı olması gerekirdi ki, bu; $\sigma(n) = 2n$ ile çelişirdi. Demek ki, $p_1 = 4k + 1$, $k \geq 0$, biçiminde olmalıdır. Bir kez daha ifade edersek, eğer bir tek mükemmel sayı varsa, bu sayı, $4k + 1$, $k \geq 0$, bir asal sayı, A bir tek sayı ve $\alpha \geq 0$ olmak üzere,

$$(4k + 1)^{4\alpha+1} \cdot A^2$$

biçiminde olmalıdır. Fakat unutmayalım ki, henüz böyle bir mükemmel sayının var olup olmadığı bilinmemektedir.

Yazımızı üzerinde çalışabileceğiniz 3 alıştırma ile bitirelim:

1. Her çift mükemmel sayının son basamağında ya 6 ya da 8 bulunduğunu kanıtlayınız. (Bunun için, 2 'nin pozitif kuvvetlerinin son basamağında, dönüşümlü olarak, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, ... bulunduğunu kullanabilirsiniz.)

2. Bir mükemmel sayının tüm pozitif bölenlerinin (çarpımsal) terslerinin toplamının 2 olduğunu gösteriniz. Örneğin, 6 mükemmel sayısının pozitif bölenleri 1, 2, 3, 6; bunların terslerinin toplamı,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2$$

'dir.

3. Sadece üç veya daha az asal çarpanı bulunan bir tek sayının mükemmel olamayacağını gösteriniz.

KAYNAKLAR

1. Guy, R.K.; Unsolved Problems in Number Theory; Springer-Verlag, New York, 1981.

2. Kaya, A.; Sayılar Kuramına Giriş; Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, İzmir, 1988.

3. Ribenboim, P.; The Little Book of Big Primes, Springer-Verlag, New York, 1991.

4. The Inter-Irem Commission; History of Mathematics Histories of Problems, Ellipses, Paris, 1997.

5. Wagon, S.; Perfect Numbers, The Mathematical Intelligencer, 7,2,1985, 66-68.

ÜNLÜ KADIN MATEMATİKÇİLER (II)

Hülya Şenkon

Sophie Germain (1776-1831)

Sophie Germain, 1 Nisan 1776 'da Fransa 'da dünyaya geldi. 1794 'de Paris 'te Ecole Polytechnique açıldı. Sophie bu okula devam edemedi, fakat orada verilen bazı derslerin temin ederek okuyordu. O sıralarda yazdığı, analizle ilgili bir çalışmasını onun öğrencilerinden birinin adı olan "M. le Blanc" adıyla gönderdi. Lagrange bu çalışmadan son derece etkilendi ve yazarının gerçek kimliğini keşfettiği zaman, Sophie 'nin evine goderek kendisine ümit vaadeden genç bir analizci olduğuna ilişkin övgülerini sundu. O günden sonra Lagrange, Sophie 'nin hem başlıca koruyucusu, hem de danışmanı oldu.

1801 yılında Gauss, önemli eseri "**Disquisitiones Arithmeticae**" 'yı yayınladı. Bu eseri inceleyen Sophie, 1804 yılında Gauss ile yazışmaya başladı. Gauss, kendisine sık sık yazan "M. de Blanc" 'ın matematik yeteneğine hayrandı. 1807 'de Napolyon 'nun askerleri, Gauss 'un yaşadığı Brunswick kentinin yakınında çarpışıyorlardı. Arşimet 'in acı sonunu hatırlayan Sophie, Gauss 'un can güvenliği ile ilgilenmeye karar verdi ve onun korunması için, aile dostları olan, o yörenin Fransız generalinin aracılığını rica etti. General derhal Gauss 'un güvenliğinin sağlanması için bir görevli gönderdi; fakat Gauss, bir Fransız matmazelden söz ettiğini işitince çok şaşırdı, çünkü onu M. de Blanc olarak tanıyordu. Gauss durumu öğrenince koruyucusuna şu dikkate değer mektubu yazdı:

> Size olan hayranlığımı ve saygıdeğer mektup arkadaşım M. de Blanc 'ı inanılması güç ve çarpıcı bir kişiliğe bürünmüş olarak görmekten duyduğum şaşkınlığı nasıl ifade edeceğimi bilemiyorum. Genelde soyut bi9limlerden ve bunun ötesinde sayıların gizeminden zevk alan kimseler çok nadirdir; bu insanı şaşırtır; bu yüce bilimin büyüleyici çekim gücü, kendisini ancak, içine derinlemesine girme cesareti ni ortaya koyanlara gösterir. Fakat, örf ve adetlerimize göre, zorlu araştırmalara kendisini alıştırabilmek için, erkeklerden çok daha fazla güçlüklerle çarpışmak zorunda kalan, karşı cinsten biri, bu engelleri aşmayı ve en karanlık noktalara nüfuz etmeyi başardığı takdirde, hiç şuphesiz o kişi, büyük bir cesaretle, olağanüstü yeteneklere ve üstün bir zekaya sahiptir. Gerçekten, yaşamını zenginleştiren bu bilimin çekim gücünün hayali olmadığını bana hiç bir şey, sizin gösterdiğiniz ilgi ve eğilim kadar yalın ve şüphe götürmez bir biçimde ispat edemezdi.

Sophie, sayılar terisi üzerinde de çalışmalar yaptı ve Legendre, sayılar teorisi ile ilgili çalışmasının 2.baskısını yayınlarken Sophie 'nin buluşlarının bir çoğunu eserine aldı. Sophie, x, y, z ikişer ikişer aralarında asal doğal sayılar ve $n > 2$ olmak üzere $x^n + y^n = z^n$ ise, n 'nin 100 'den büyük olması gerektiğini ispat ederek, "**Fermat Problemi**" ile ilgili araştırmalarda ileri bir adım atmış oldu.

1808 'de fizikçi Chladni, levha titreşimlerinin matematiksel teorisini ele aldı ki, bu konu, o zamanki matematiğin sınırları dışında kalmaktaydı. Franse Bilimler Akademisi 1811 yılında, elastik yüzeylerle ilgili ve özellikle Chladni 'nin deneysel sonuçlarıyla karşılaştırmaları da içeren bir araştırma için bir ödül ortaya koydu. O yıl bu ödülü kazanan olmadı, fakat Sophie, Lagrange 'a yollamış olduğu çalışmasına dayanarak, uniform bir düzlemsel elastik levhanın titreşimleri için, 4.mertebeden bir kısmi türevli diferansiyel denklem, kendisine ödül kazandırdı. Sophie 'nin Akademiye üye olarak kabul edildiği 1813 yılında ikinci bir ödül kondu, fakat o da sahipsiz kaldı. 1816 yılında üçüncü bir ödül kondu ve bu kez Sophie 'nin uniform bir eğrisel elastik levhanın titreşimleri için bulduğu kısmi türevli denklem, kendisine bu ödülü kazandırdı. Böylece Sophie; **Cauchy, Ampère, Legendre, Fourier** ve **Poisson** gibi bir çok Fransız matematikçisinin arasına katılmış oldu. Daha sonra levhalarla ilgili çalışmalarını, uniform olmayan eğrisel elastik levhaların titreşimlerine de genelleştiren Sophie, aynı zamanda kimya, fizik, tarih ve coğrafya üzerinde de çalıştı ve 2 ciltten oluşan bir felsefe kitabı yazdı.

Gauss 'un önerisi üzerine Göttingen Üniversitesi, Sophie 'ye fahri doktorluk ünvanının verilmesini kabul etti, ancak Sophie bu ünvanı alamadan, 26 Haziran 1831 'de öldü.

Mary Fairfax Greig Somerville (1780-1872)

Mary Fairfax, 26 Aralık 1780 'de İskoçya 'da dünyaya geldi. Mary, gençliğinde aritmetiğe merak sardı, fakat ailesi onun daha fazla öğrenim görmesine karşıydı. Mary, 24 yaşında iken kuzeni Samuel Greig ile evlendi. Fakat eşi 3 yıl sonra öldü. Bir süre sonra Mary, popüler bir matematik dergisindeki ödüllü bir problemi çözerek gümüş bir madalya kazandı. 32 yaşında iken bir başka kuzeni ile, **Dr. William Somerville** ile evlendi. Kendisini her bakımdan cesaretlendiren ve çalışmalarını destekleyen eşiyle Londra ve Paris 'te yaşadı ve bu arada bilim adamıyla karşılaştı. Deneysel fizikle ilgili bir kaç çalışmasını yayınlayan Mary, arkadaşlarının önerisi üzerine Laplace ' ın **"Mécanique Céleste"** adlı ünlü eserini İngilizceye çevirdi ve bu çeviri 1831 yılında **"The Mechanism of the Heavens"** adıyla yayınlandı. Kitap beklenmedik bir ilgi gördü, pek çok kez basıldı ve yaklaşık bir yüzyıl boyunca matematiksel astronominin temel kitaplarından biri olarak kullanıldı. Mary, Laplace 'ın karışık ve anlaşılmaz olarak bilinen eserini açık ve rahat anlaşılır bir duruma getirerek, en usta bilim yazarlarından biri olduğunu ispat etti. Bu İngilizce çevirinin kendisi tarafından yazılan önsözü de ayrıca **"A Preliminary Dissertation on the Mechanism of the Heavens"** adıyla defalarca basıldı ve kitabın kendisi gibi, yüzyıl boyunca popülerliğini korudu.

Mary, uzun yaşamının geri kalan bölümünü daha çok İtalya'da geçirdi ve yüksek düzeyli bilimsel eserler yazmaya devam etti. İlk kez 1834 yılında yayinlanan **"The Connection of the Physical Sciences"** adlı eserinin tam 9 kez genişletilmiş baskısı yapıldı. Mary 'nin eserleri, çeşitli vesilelerle parlamenterler tarafından eleştirildi; **"Physical Geography"** adlı kitabı, teologlara karşı jeologları desteklediği gerekçesiyle York Katedralinin saldırılarına hedef oldu, fakat buna karşın bir çok kez basıldı. Moleküler ve mikroskopik ilimle ilgili büyük kitabı 1869 'da, kendisi 89 yaşında iken basıldı ve Mary, bu eserinin düzeltilmiş 2. baskısını hazırlıyordu. Son yıllarında ilginç anılarını derledi ve bu anılar, kendisinin ölünden sonra yayınlandı. Ayrıca 40 yıl önce yazmaya başlamış olduğu **"Finite Differences"** adlı eserinin manuskriptlerini yeniden gözden geçirdi. 92 .doğum yıldönümünden bir ay önce, 29 Kasım 1872 günü aniden öldü, öyle ki, aynı günün sabahı kuaterniyonlarla ilgili bir makalesi üzerinde çalışıyordu.

KAYNAKLAR

G. J. Tee, "The Pioneering Women Mathematicians", The Mathematical Intelligencer, Vol.5 (1983) Nr 4, s.27-36, Springer-Verlag.

EĞLENCELİ BİR MATEMATİK SORUSU

Ogün Doğru
Ankara Üniversitesi, İstatistik Bölümü, ANKARA

Başarıdan başarıya koşarak ülkemizi *UEFA* kupasında en iyi biçimde temsil eden ve tarihimizin spordaki en büyük başarısını elde eden büyük GALATASARAY 'ımızın bu büyük kupaya ulaşmış olduğu şu günlerde kendi simgesi olan RERERE - RARARA, GS-GS, CİMBOMBOM kelimelerinden oluşturduğum aşağıdaki problemi eğlenceli bir matematik sorusu olarak derginiz, MATEMATİK DÜNYASI 'na sunuyorum:

SORU: Farklı her harf, farklı bir rakamı göstermek üzere aşağıdaki eşitliği gerçekleyen rakamları bulunuz:

$$\frac{\mathrm{RERERE}}{\mathrm{RARARA}} = \frac{\mathrm{CİM}}{\mathrm{BOM}} = \frac{\sqrt{\mathrm{G+S}}}{\sqrt{\mathrm{C+İ+M}} + \sqrt{\mathrm{B+O+M}}}$$

YAZARLARA

Dergimiz matematiğe ilgi duyan herkesi yazar kadrosunda kabul etmektedir. Yayınlanacak yazıların matematik ile ilgili olması dışında herhangi bir kısıtlama yok. Fikir vermesi açısından şu konuları sıralayabiliriz:

- Konu sunuşları ve matematiksel düşüncenin değişik alanlardaki uygulamalarını vurgulayabilecek yazılar.
- Yıllardır çözüm bekleyerek yeni çözülmüş ya da henüz çözülmemiş ünlü problemlerin tanıtımı.
- Matematiğe ilgi duyan öğrencilerin kendilerini aşmasına yardımcı olabilecek problemler.
- Matematiksel kavramlar tarihi ve matematikçilerle ilgili yazılar.
- Daha sağlıklı bir müfredat programını oluşturmaya yönelik inceleme, eleştiri ve alternatif öneriler.
- Matematik dünyasından güncel haberler.

Gönderilen yazılar aynen yayınlanabileceği gibi bütünlüğü bozmayacak bazı değişikliklerle de yayınlanabilir. Şimdilik olanaklarımız yazarlara telif ücreti ödemeye elverişli değildir. Bu nedenle anlayışla karşılanacağımızı umuyoruz. Gönderilecek yazıların okunaklı el yazısı ya da tercihen daktilo ile ya da PC 'de LaTex programı yardımıyla, düzgün ve tam cümlelerle, Türkçe dilbilgisi kurallarına uyularak, üstüste formül yığınlarından kaçınılarak yazılması, beş sayfayı geçecek yazılarda bölme noktası belirtilmesi rica olunur. Yazılar

Matematik Dünyası, Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-Antalya

adresine gönderilecektir.

SAYIN OKURLARIMIZ...

Önceden yayınlanmış olan "Matematik Dünyası" dergisinin sayıları, tanesi 750.000,- TL karşılığında, satışa sunulmuştur. Bu sayıları edinmek isteyen okurlar, tutarını Türkiye İş Bankası Antalya Şubesi 6200/30000/2203551 no'lu **Prof. Dr. Halil İbrahim Karakaş** hesabına yatırıp, dekontun bir örneği ile istedikleri sayıları bize gönderdikleri takdirde, sözkonusu sayılar adreslerine postalanacaktır.

Elimizde Bulunan Sayılar:

Cilt 1	Sayı: 1,2,3	/	Cilt 2	Sayı: 1,3,5
Cilt 4	Sayı: 4	/	Cilt 5	Sayı: 1
Cilt 7	Sayı: 1,2,3,4,5	/	Cilt 8	Sayı: 1,2,3,4,5
Cilt 9	Sayı: 1,2			

---

5. ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYADI 2. AŞAMA SORULARI

LİSE I GRUBU

1. p ve q tek asal sayılar ve p ile q arasında başka asal sayı yoksa, $p+q$ sayısının, her biri 1 'den büyük en az üç tane doğal sayının çarpımı olarak yazılabileceğini gösteriniz. (Çarpanların farklı olmaları gerekmez.)

2. Sıfırdan farklı x, y, z sayıları $x^2 - y^2 = yz$ ve $y^2 - z^2 = zx$ eşitliklerini sağlıyor. $x^2 - z^2 = xy$ olduğunu gösteriniz.

3. Her biri 100 'den küçük olan 10 farklı pozitif tam sayının oluşturduğu her kümenin boş olmayan ve ayrık öyle iki altkümesi vardır ki, bu altkümelerden birindeki sayıların toplamı diğerindeki sayıların toplamına eşittir; ispat ediniz.

4. Düzlem üzerinde, hepsi bir doğru üzerinde bulunmayan 2000 tane nokta işaretlenmiş ve bu noktaların herbirinin yanına o noktanın yükü diyeceğimiz bir reel sayı yazılmıştır. Üzerinde en az iki işaretlenmiş nokta bulunduran her doğrunun tüm işaretlenmiş noktalarının yükleri toplamı sıfır olduğuna göre, her noktanın yükünün sıfır olduğunu kanıtlayınız.

5. Dar açılı bir ABC üçgeninin çevrel çemberine A ve B noktalarında teğet olan doğruların kesişim noktası D; DC ile $[AB]$ 'nin kesişim noktası da E ile gösteriliyor. $\dfrac{|AE|}{|EB|} = \dfrac{|AC|^2}{|BC|^2}$ olduğunu ispat ediniz.

LİSE II-III GRUBU

1. Bir n doğal sayısının kendisinden küçük tüm doğal sayılara bölünmesiyle ortaya çıkan farklı kalanların toplamı $K(n)$ ile gösterilsin (Örnek: $K(9) = 1+2+3+4 = 10$). $K(n) = n$ olan tüm n doğal sayılarını bulunuz.

2. İki öğrenci, tahtaya $x^2 + 19x + 91$ polinomunu yazarak şöyle bir oyun oynuyorlar: Birinci oyuncu, polinomun başkatsayısı dışındaki katsayılarından birini silip, onun yerine bir fazlasını veya bir eksiğini yazıyor. Benzer şekilde, ikinci oyuncu da ortaya çıkan polinomun başkatsayısı dışındaki katsayılarından birini silip, onun yerine bir fazlasını veya bir eksiğini yazıyor ve oyun bu şekilde sürdürülüyor. Bir süre sonra, tahtada $x^2 + 91x + 19$ polinomu yazılmış olduğuna göre, bundan önce yazılan polinomlardan en az birinin köklerinin ikisinin de tamsayı olduğunu kanıtlayınız.

3. $n \geq 3$ olmak üzere $a_1, a_2, \dots, a_n$ reel sayıları için

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \quad \text{ve} \quad a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq n^2$$

eşitsizlikleri sağlanmaktadır. $a_1, a_2, \dots, a_n$ sayıları içinde 2 'den küçük olmayan en az bir sayı bulunduğunu ispat ediniz.

4. Bir mühendis, her biri düzlemde uygun bir parabolün iç bölgesini aydınlatabilen sonlu sayıda fener ile tüm düzlemi aydınlatabileceğini söyleyince, matematikçi olan arkadaşı bunun mümkün olmadığını kanıtlıyor. Bunu siz de kanıtlayınız.

5. Dar açılı bir ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi O; $[OA]$ üzerinde alınan bir E ($A \neq E \neq O$) noktasından, $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ kenarlarına indirilen dikmelerin ayakları, sırasıyla N, L, M; ABC üçgeninin A 'dan geçen yüksekliğinin $[BC]$ kenarını kestiği nokta D ile gösterilmek üzere; N, L, D, M noktalarının bir çember üzerinde bulunduğunu ispatlayınız.

UYARI: Bu soruların çözümleri gelecek sayımızda verilecektir.

5. ANTALYA MATEMATİK OLİMPİYADININ ARDINDAN

Zeynep Güvenç
Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA

---

8 Nisan Pazar günü, Türkiye'nin dört bir yanından gelip, Antalya'da toplanan 1002 lise öğrencisi için farklı bir heyecanla başladı. Sadece onlar için değil tabii ki... Aileleri, öğretmenleri ve Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümü için de... Bu insanların aynı heyecanı paylaşmasına neden olan şey, 5. Antalya Matematik Olimpiyadı 1. Eleme Sınavıydı.

1002 lise öğrencisi ve matematik öğretmenleri, o sabah saat 10.00'da başlayacak Matematik Olimpiyadı Sınavı için Antalya'daydılar. Birkaç gün önceden Antalya'ya gelen misafirler, Antalya'nın o güzel bahar havasının tadını çıkarmışlar, geri dönünce anlatacakları Antalya hatıralarını çoğaltmak için mümkün olduğunca çok gezip eğlenmeye çalışmışlardı. Ama sınav günü artık akıllarında sadece "Acaba nasıl sorular çıkacak?", "Acaba çözebilecek miyim?" soruları vardı.

İşte 8 Nisan sabahı Akdeniz Üniversitesi Kampüsü, Türkiye'nin dört bir yanından gelen, aynı heyecanı paylaşan 1002 liseli matematiksever sayesinde farklı bir Cumartesi günü yaşıyordu. Rengarenk giysileriyle, cıvıl cıvıl, zekilikleri gözlerinden belli olan öğrenciler, onları izleyenlere "İşte Türkiye'nin parlak geleceği!" dedirten coşku ve heyecanla sınavı bekliyorlardı.

Matematik Bölümü, Konyaaltı Belediyesi, Akdeniz Üniversitesi Sağlık, Kültür ve Spor Daire Başkanlığı çalışanları, sınav organizasyonunun eksiksiz ve hatasız bir şekilde yürümesi için ellerinden geleni yaptılar. Sadece 8 Nisan günü değil, bir ay önceden başlayan bu çalışmalar, sınav sorularını hazırlamak için uzun zamanlarını veren hocalarımızı yormuştu. Ama sınavı bekleyen bu coşkulu kalabalık, onlara tüm yorgunluklarını unutturdu.

Ve nihayet saat 10.00'a birkaç dakika kala öğrenciler öğretmenlerinin son öğütlerini de alarak sınav yerlerini aldılar. Ardından da 3 saatlik zorlu bir matematik sınavında 20 soruluk bir soru kağıdıyla başbaşa kaldılar.

Sınav çıkışı diğer sınav çıkışlarından pek farklı değildi: "Zordu", "Kolaydı", "Süre yetmedi" yorumları, öğrencilerin yüzündeki sevinç ya da üzüntü çizgileri, dışarıda bekleyenlerin meraklı bakışları ve öğrencilerden bekledikleri umut verici sözler,... Artık sonuçları beklemekten ve Antalya'daki son saatlerini değerlendirmekten başka bir şey kalmamıştı.

Ve sonuçlar belli oldu. Matematik bilgi ve yeteneklerini, aldıkları yüksek puanlarla ispatlayan 33 öğrenci 2. aşama sınavına katılma hakkı kazanmışlardı.

19 Mayıs Cuma sabahı, Akdeniz Üniversitesi Matematik Bölümünde yine farklı bir telaş vardı. Yine farklı yerlerden gelen 28 öğrenci gözlerinden zeka fışkıran bakışlarla yerlerine oturmuş, sınavı bekliyorlardı. Matematik Bölümü öğretim üyeleri, Türkiye 'nin, belki de dünyanın bilimcileri arasında olacak ve gurur duymalarını sağlayacak bu genç beyinleri görmek, onlara başarılar dilemek için sınav salonuna gidip geldiler.

Matematiksever 28 liseli, saat 10.00'da, bu sefer daha büyük bir sorumluluk ve heyecanla sınav sorularını çözmeye başladılar Hocalarımız da sınav sonuçlarını en kısa zamanda belirleyip, Pazar günü ödül törenini gerçekleştirmek için gerekli hazırlıkları yaptılar. Tabii bu arada biz Araştırma Görevlileri de her türlü yardım için elimizden geleni yaptık. Olimpiyadın her aşamasında olduğu gibi Sağlık, Kültür ve Spor Dairesi Başkanlığı'ndan olimpiyatla ilgilenenler, o gün de oldukça yoruldular.

Saat 13.00'te öğrenciler, bir sınavı daha atlatmanın sevinciyle, Pazar günkü törende buluşmak üzere ayrıldılar. Sıra, sınav kağıtlarının okunmasına gelmişti. Ancak bu işten önce çözülmesi gereken bir sorun vardı: Açlık.

Bölüm Başkanımız Halil İbrahim Karakaş bu sorunu da çabucak halletti ve biraz sonra nefis pideler bölüme teşrif ettiler. Bu sorunun da ortadan kalkmasıyla, kağıtların okunup puanlanması için hummalı bir çalışma içine girildi. Akşam geç vakitlere kadar süren bu yorucu ve titiz çalışma, 5. Antalya Matematik Olimpiyadının şampiyonlarının belirlenmesiyle son buldu.

Pazar günü 14.30'da, kampüs içindeki Atatürk Konferans Salonu, orada bulunan herkesin duygulandığı, ödül alanları şahsen tanımasalar bile kendi çocukları, kardeşleri ödül alıyormuş gibi sevindiği bir törene sahne oldu. 28 liseli öğrenci ödüllerini alıp sahnede sıraya dizildikçe izleyenlerin coşkusu ve hayranlıkları arttı. Gelecekten en umutsuzların bile içine umut ışığı yakan bu gençler, bizim dışarıya karşı gururumuz, onurumuz olacak, onların başarılarıyla övüneceğiz.

Antalya Matematik Olimpiyatlarının 5.'si işte böyle heyecanlarıyla, sevinçleriyle, yorgunluklarıyla, öğrencilerin böyle organizasyonların tekrarlanması, hocaların bu olimpiyada böyle yoğun ilginin sürmesi dilekleriyle geçti, gitti. Seneye yeniden buluşmak üzere...

ÖZEL BİR MEKTUP

Ismahan Aşıkdoğan
Özel Antalya Lisesi, ANTALYA

Bu defteri ömrüm boyunca saklayacağım. İlk kez kendimi bu kadar bilimle içiçe hissediyorum, ve de çok mutlu, huzurluyum. Sanırım her şey benim için yeniden başlıyor. Belki de bu başlangıca tek etken 08.04.2000 tarihinde girdiğim "Matematik Olimpiyat" 'larıdır. Matematiği çok seviyorum ki bu benim hayatımdaki vazgeçilmez bir gerçek... Ama bu sınav sayesinde kendi kendime formül üretmeyi, mantığımı kullanarak, kalıplaşmış bilinen çözüm yollarından uzaklaşarak sorulara yanıt bulmayı öğrendim. Kendime güvenmeye daha çok alıştım ve artık ufkumu genişletmek, zekamı ilerletmek istiyorum. Üstelik yalnız da değilim, bu okuldaki öğretmenlerim, bazı arkadaşlarım ve özellikle Nükhet Öğretmenim en büyük destekçilerim. Ben inanıyorum ki Nükhet Öğretmenim ile aramızdaki diyalog genişledikçe, ben bu diyalog sonucunda bir takım şeyleri kavradıkça daha pek çok başarılara imza atabilirim. Asıl önemli olan, insanın kendisi ile barışık olması ve kendisine güvenmesi...

Ben sonuna kadar güveniyorum kendime ve unutmadan söyleyeyim, "Bir gün ideallerime kavuşunca, ne bu okulu, ne bana destek olan değerli öğretmenlerimi ve sevgili dostlarımı, ne de içimdeki bu kavuşma duygusunu (isteğini) ve hırsını unutacağım... Hepsi benim için çok değerli. Bir gün mutlaka istediğim mesleğe ulaşacağım, tüm kalbimle inanıyorum buna..."

PROBLEMLER VE ÇÖZÜMLERİ

Uyarı: Dergimize alıştırma problemlerinin çözümlerini değil, yalnızca yarışma problemlerinin çözümlerini yollayınız. Çözümleri gönderirken lütfen şu noktalara dikkat ediniz:

- Her sorunun çözümünü ayrı bir kağıda okunaklı ve anlaşılır bir biçimde yazınız.

- Kağıdın sağ üst köşesine adınızı, soyadınızı, adresinizi, öğrenci iseniz okulunuzu ve sınıfınızı yazınız.

- Çözümleri, Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü, 07058-ANTALYA adresine 31 Temmuz 2000 tarihine kadar gönderiniz.

ALIŞTIRMA PROBLEMLERİ

A.211. Her biri 1 veya -1 'e eşit olan $a_1, a_2, \ldots$, a_n sayıları için $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1$ eşitliğinin sağlandığı bilinmektedir. n sayısının 4 'e bölündüğünü kanıtlayınız.

A.212. 1, 2, 3, ..., 80, 81 sayılarının tümü, birim karelere ayrılmış 9×9 karesinin hanelerine rasgele yerleştiriliyor. Sayılar nasıl yerleştirilirse yerleştirilsin, ortak bir kenarı bulunan ve içlerine yerleştirilmiş sayıların farkı en az 6 olan en az iki hanenin bulunduğunu ispatlayınız.

A.213. $x + 1/x$ bir tamsayı ise, her $n \in \mathbf{N}$ için $x^n + 1/x^n$ sayısının da bir tamsayı olduğunu kanıtlayınız.

A.214. x sayısının tam kısmını $[[x]]$ ile gösterelim. $x + \frac{99}{x} = [\![x]\!] + \frac{99}{[\![x]\!]}$ denkleminin tam olmayan kökünün kesir kısmını bulunuz.

A.215. Düzlemde aynı doğru üzerinde bulunmayan A, B, C noktaları ile bir $k \in \mathbf{R}^+$ sayısı veriliyor. $|PA|^2 + |PB^2| + |PC|^2 = k$ şartını sağlayan P noktalarının geometrik yerini bulunuz.

YARIŞMA PROBLEMLERİ

Y.211. Doğal sayılar kümesinin aşağıdaki koşulları sağlayan 2001 altkümeye parçalanıp parçalanamayacağını belirleyiniz:

(i) Altkümeler ikişer ikişer ayrık ve hiç biri boş değildir.

(ii) Altkümelerin birleşimi tüm doğal sayılar kümesidir.

(iii) Bu altkümelerden herhangi 2000 tanesi seçilir ve bu 2000 kümeden birer tane eleman seçilip bu elemanların 2000-inci kuvvetleri alınarak elde edilen 2000 sayı çarpılırsa, bu çarpım, seçilmeyen kümenin elemanlarıdır. (Alp Şimşek; İzmir Fen Lisesi)

Y.212. a, b, c, d pozitif reel sayılar ve $bc \geq ad$ ise,

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$$
$$\leq b + \sqrt{(a+c)^2 + d^2}$$

olduğunu gösteriniz. (M. Bumin Yenmez; İzmir Özel Yamanlar Lisesi)

Y.213. P, ABC üçgeni içinde alınan bir nokta olmak üzere; $\overset{\triangle}{PAB}$, $\overset{\triangle}{PBC}$, $\overset{\triangle}{PCA}$ üçgenlerinin çevrel çember yarıçapları, sırasıyla, R_1, R_2, R_3 olsun. Buna göre,

$$\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} + \frac{1}{|PC|} \geq \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösteriniz. (Ahmet Çetintaş; Ankara Samanyolu Lisesi)

Y.214. Merkezi bir A_1 noktasında ve yarıçapı 1 olan dairenin içinde, A_1 'den farklı, rasgele, A_2, A_3, ..., A_{100} noktaları alınmıştır. $1 \leq k \leq 100$ olan her k tamsayısı için A_k 'dan A_1, ..., A_{k-1}, A_{k+1}, ..., A_{100} noktalarına olan uzaklıklardan en küçüğü a_k ile gösteriliyor. Bu durumda

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{100}^2 < 9$$

olduğunu kanıtlayınız.

Y.215. Açıları arasında, $\hat{C} = 3\,\hat{B} = 9\,\hat{A}$ bağıntısı bulunan bir ABC üçgeninde a, b, c kenar uzunluklarını göstermek üzere, $bc + ca + ab$ ifadesinin bu üçgene ait çevrel çemberin R ile gösterilen yarıçapı cinsinden değerini bulunuz.

ÇÖZÜMLER

A.201. $x^3 - x + 1 = 0$ denkleminin her bir kökünün tersi, $x^5 + x + 1 = 0$ denkleminin bir köküdür; kanıtlayınız.

Çözüm. a sayısı $x^3 - x + 1 = 0$ denkleminin bir kökü olsun: $a^3 - a + 1 = 0$. $x^5 + x + 1$ polinomunun $x = \frac{1}{a}$ 'daki değerini, hesaplayalım:

$\frac{1}{a^5} + \frac{1}{a} + 1 = \frac{1}{a^5}(1 + a^4 + a^5)$

$$= \frac{1}{a^5}(a^5 - a^3 + a^3 + a^5 - \ a + 1 + a - a^2 + a^4)$$
$$= \frac{1}{a^5}[a^2(a^3-a+1)+(a^3-a+1)+a(a^3-a+1)]$$
$$= \frac{1}{a^5}(a^3 - a + 1)(a^2 + a + 1) = 0 \ .$$

Dolayısıyla, $\frac{1}{a^5} + \frac{1}{a} + 1 = 0$ çıkar.

A. 202. Toplamları ve çarpımları tam kareler olan doğal sayı ikilileri bulmak için bir yöntem gösteriniz.

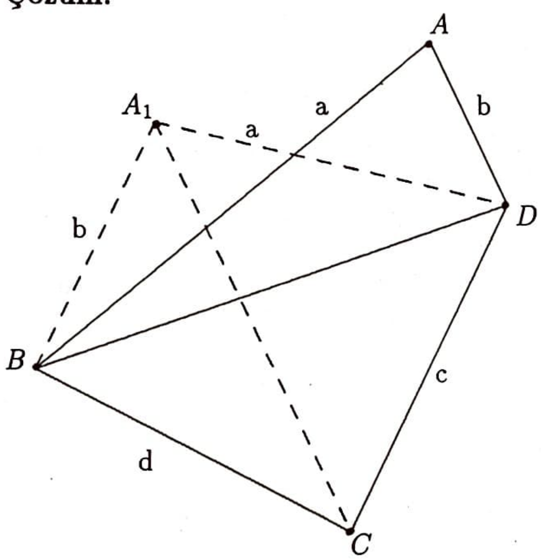
Çözüm. Herhangi a ve b doğal sayılarını alalım. $a^2 + b^2 = k$ diyelim. $x = a^2.k$ ve $y = b^2.k$ sayılarını tanımlayalım.

$$x + y = k(a^2 + b^2) = k^2 \text{ ve}$$
$$x.y = a^2b^2k^2 = (abk)^2$$

formülleri, problemde istenilen özelliğe sahip sonsuz çoklukta (x, y) doğal sayı ikileri bulmaya imkan sağlar.

A. 203. Kenar uzunlukları a, b, c, d olan bir dörtgenin alanının $\frac{ac+bd}{2}$ 'den fazla olamayacağını gösteriniz.

Çözüm.



$ABCD$ kenar uzunlukları a, b, c, d olan dörtgen olsun $\overset{\triangle}{ABD}$ üçgenine kongruent olan $A_1\overset{\triangle}{B}D$ üçgenini kuralım (şekile bakınız):

$$|A_1B| = |AD| = b, \ \ |A_1D| = |AB| = a \ .$$

$ABCD$ ve A_1BCD dörtgenlerinin alanları eşittir. Öte yandan,

$$Alan(A_1BCD) = Alan(A_1\overset{\triangle}{B}C) + Alan(A_1\overset{\triangle}{C}D)$$
$$\leq \frac{1}{2}.b.d.\sin(A_1\hat{B}C) + \frac{1}{2}.a.c.\sin(A_1\hat{D}C)$$
$$\leq \frac{1}{2}.b.d + \frac{1}{2}.a.c \ .$$

A. 204. Sıfırdan başka tüm rakamların bulunduğu ve 5 ile biten bir 9 basamaklı sayı tamkare olamaz; kanıtlayınız.

Çözüm. Problemde söz konusu olan sayıya n diyelim ve $n = k^2$ sağlanacak biçimde bir k sayısının var olduğunu farzedelim. n sayısı 5 ile bittiğinden, k da 5 ile bitmelidir: $k = 10a + 5$, $(a \in \mathbf{N})$. Buradan, $n = k^2 = 100a(a + 1) + 25$ ve dolayısıyla, n sayısının son iki basamağı 25 olmalıdır. $a(a + 1)$ sayısının son rakamı 0, 2 ve 6 sayılarından biri olabilir. Fakat n sayısında 0 (sıfır) hiç olmadığından ve 2 rakamı artık kullanıldığından $a(a + 1)$ sayısının son rakamı 6 olmalıdır. Dolayısıyla, n sayısının sondan üç basamağı 625 olmalıdır: $n = 1000t+625$, $(t \in \mathbf{N})$. Demek ki, n, $125 = 5^3$ ile bölünür. Ancak n bir tam kare olduğundan, bu sayı, 5^4 ile bölünmelidir. Bu ise yalnız ve yalnız t sayısı 5 ile bölünebildiği zaman mümkündür. t 'nin 5 ile bölünebilmesi için onun son rakamı ya sıfır (ki buna izin verilmiyor), ya da 5 olmalıdır. Fakat 5 rakamı bir kez kullanıldığından bu mümkün değildir. Böylece, problemdeki özelliklere sahip bir sayı tam kare olamaz.

A. 205. $\overset{\triangle}{ABC}$ üçgeninin AH yüksekliği, BD kenarortayı ve CN iç açıortayı aynı bir noktadan geçiyorsa, a, b, c (kenar uzunlukları) arasında hangi bağıntı vardır?

Çözüm. Söz konusu doğru parçaları P 'den geçsin. Ceva Teoremi gereğnce,

$$\frac{AN}{NB}.\frac{BH}{HC}.\frac{CD}{DA} = 1 \Leftrightarrow \frac{b}{a}.\frac{BH}{HC}.\frac{1}{1} = 1$$

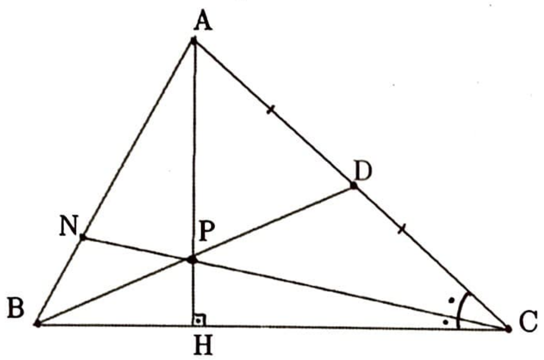
olur. $\frac{BH}{HC} = \frac{a}{b}$ 'dir. $\frac{BH}{HC} = \frac{ak}{bk}$, $BH = ak$, $HC = bk$ olsun.

$$BH + HC = BC \Leftrightarrow ak + bk = a \ .$$

Buradan $k = \frac{a}{a+b}$ bulunur. Dik üçgenlerden,

$$AH^2 = c^2 - a^2k^2 = b^2 - b^2k^2$$
$$\Rightarrow c^2 - b^2 = k^2(a^2 - b^2)$$
$$\Rightarrow c^2 - b^2 = \frac{a^2}{(a+b)^2}(a - b)(a + b)$$
$$\Rightarrow c^2 - b^2 = a^2(a - b)\frac{1}{(a+b)}$$
$$\Rightarrow (c^2 - b^2)(a + b) = a^2(a - b)$$

bulunur.



Y.201. $a_0, a_1, ..., a_{n-3}$ reeel sayılar olmak üzere,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-3}x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

denkleminin köklerinden en az birinin reel olamayacağını; yani, karmaşık olacağını kanıtlayınız.

Çözüm. Denklemin köklerine $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ diyelim. Her $j = 1, ..., n$ için $\alpha_j \neq 0$ olacağı açıktır. Vieta Teoremine göre,

$$(-1)^n \alpha_1\alpha_2...\alpha_n = \frac{1}{a_0},$$
$$(-1)^{n-1}\alpha_1\alpha_2...\alpha_n(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha_j}) = \frac{1}{a_0},$$
$$(-1)^{n-2}\alpha_1\alpha_2...\alpha_n(\sum_{i>j} \frac{1}{\alpha_i\alpha_j}) = \frac{1}{a_0}.$$

Buradan,

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha_j} = -1 \text{ ve } \sum_{i>j} \frac{1}{\alpha_i\alpha_j} = 1$$

olduğu görülür. Sonuncuları kullanarak şunları yazabiliriz:

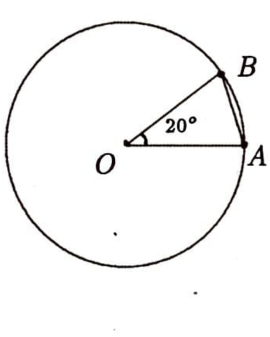
$$1 = (\sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha_j})^2 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha_j^2} + 2.\sum_{i>j} \frac{1}{\alpha_i\alpha_j}$$
$$= \sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha_j^2} + 2.$$

Buradan ise $\sum_{j=1}^n \frac{1}{\alpha_j^2} = -1$ elde edilir ki, bu da α_j 'lerin hepsinin reel olamayacağını gösteriyor.

(**Çözenler:** *Osman N. Osmanlı (Ankara), Metehan Aydın (Ankara), Yunus Esençayı (Ankara), Ali N. Duman (Ankara)*).

Y.202. $\frac{20}{60} < \sin 20^o < \frac{21}{60}$ eşitsizliğini ispatlayınız.

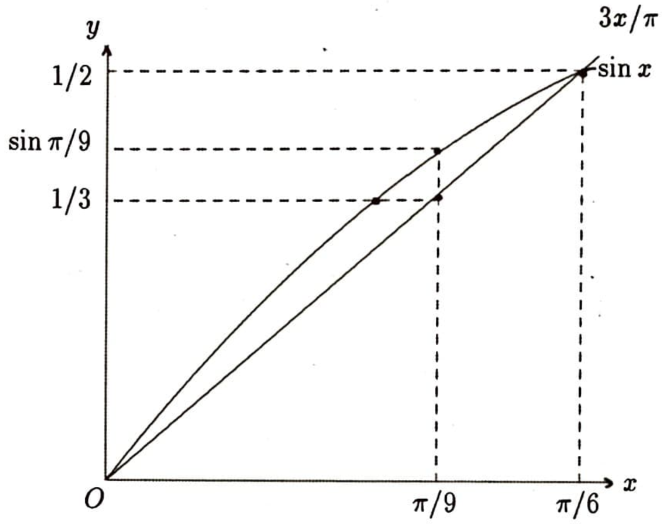
Çözüm.



Merkezi O noktasında olan birim daireyi 18 tane eşit (kongruent) dilime bölelim. Şekilde $A\hat{O}B = 20^o$ ve AOB diliminin alanı $\frac{\pi}{18}$ 'dir. Öte yandan, $\overset{\triangle}{AOB}$ üçgeninin alanı

$\frac{1}{2}|OA||OB|.\sin 20^o = \frac{1}{2}.\sin 20^o$ 'dir.

Üçgenin alanı dilimin alanından küçük olduğundan, $\frac{1}{2}.\sin 20^o < \frac{\pi}{18} \Rightarrow \sin 20^o < \frac{\pi}{9} < \frac{7}{20} \Rightarrow \sin 20^0 < \frac{21}{60}$.



Şimdi, $(0, \frac{\pi}{6})$ aralığında $y = \sin x$ fonksiyonunun grafiği yukarıya doğru konveks olduğundan, bu aralıkta $y = \sin x$ 'in grafiği $y = \frac{3}{\pi}x$ doğrusunun grafiğinden yukarıda bulunacaktır. (Şekile bakınız.) Böylece, her $x \in (0, \frac{\pi}{6})$ için $\sin x > \frac{3}{\pi}x$ ve özel halde, $x = \frac{\pi}{9}$ için

$\sin 20^o = \sin\frac{\pi}{9} > \frac{3}{\pi}.\frac{\pi}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin 20^o > \frac{1}{3} = \frac{20}{60}$ olur.

Çözüm 2. Her $\theta \in \mathbf{R}$ için $\sin 30^o = -4\sin^3\theta + 3\sin\theta$ olduğu bilindiğinden, $\theta = 20^o$ alınarak, $\sin 20^o$ 'nin

$$f(x) = 4x^3 - 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

polinomunun bir kökü olduğu görülür. Aradeğer Teoremi kullanılarak, $f(x)$ 'in $(-2, 0)$, $(\frac{20}{60}, \frac{21}{60})$ ve $(\frac{1}{2}, 1)$ aralıklarında birer kökü bulunduğunu görmek zor değildir. $0 < \sin 20^o < \sin 30^o = \frac{1}{2}$ olduğundan,

$$\frac{20}{60} < \sin 20^o < \frac{21}{60}$$

'tır.

(**Çözenler:** *Osman N. Osmanlı (Ankara), Yunus Esençayı (Ankara), Metehan Aydın (Ankara), Ali N. Duman (Ankara), Necati Girgin (Denizli)*).

Y.203. Bir $k \in \mathbb{N}$ sayısının şu özelliği vardır: k 'ya bölünen herhangi bir sayının rakamları ters sırada dizilerek elde edilen sayı da k 'ya bölünmektedir. k 'nın 99 'u böldüğünü kanıtlayınız.

Çözüm. Söz konusu özelliğe sahip k sayısı için $(k, 10) = 1$ olmalıdır. Çünkü 1 ile başlayan ve k 'ya bölünen (ki böyle sayılar sonsuz çokluktadır) bir sayının ters yazılımından elde edilen (yani, son rakamı 1 olan) sayı da k ile bölünmelidir.

Şimdi, 500 ile başlayan ve k 'ya bölünen bir sayı alalım. (Böyle sayılar da sonsuz çokluktadır. Çünkü $5000xy...z$ şeklinde çok büyük bir sayının k 'ya bölümünden kalanı bu sayıdan çıkarırsak, elde edilen sayı 500 ile başlayacak ve k 'ya bölünecektir.)

Böylece, $500ab...c$ sayısının ve onun rakamlarının ters sırada dizilişinden elde edilen $c...ba005$ sayının k ile bölündüğünü varsayalım. O halde, bu sayılar kullanılarak elde edilen

$$c...ba0050000...00 + 500ab....c = c...ba01000ab....c$$

sayısı ve onun "ters yazılımı olan $c...ba00010ab...c$ sayısı da k 'ya bölünecektir. Öyleyse, aşağıdaki fark da k 'ya bölünecektir:

$$c...ba01000ab...c - c...ba00010ab...c = 99000...0 .$$

Böylece, $99000...9$ sayısı, k ile bölünmelidir. Fakat $(j, 10) = 1$ olduğundan, $k|99$ olmalıdır.

(**Çözenler:** *Ali N. Duman (Ankara), Osman N. Osmanlı (Ankara), Metehan Aydın (Ankara), Yunus Esençayı (Ankara)*).

Y.204. $\sqrt{2}$, 2 ve $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sayıları verilmiştir. Bu sayılardan herhangi ikisinin yerine, onların toplamının $\sqrt{2}$ 'ye bölümünü ve farkının $\sqrt{2}$ 'ye bölümünü koymaya izin veriliyor. Bu işlemler bir kaç defa yapılarak, 1, $\sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$ üçlüsünü elde etmek mümkün müdür?

Çözüm. Bu işlemler sonucunda sayıların kareleri toplamı değişmiyor. Gerçekten, verilen sayılar üçlüsüne a, b, c denirse, işlem sonucu elde edilen sayı üçlüsü $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$, $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$, c olacaktır ve sonuncuların kareleri toplamı

$$(\frac{a+b}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{a-b}{\sqrt{2}})^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

olacaktır. Şimdi, verilen sayıların kareleri toplamı

$$(\sqrt{2})^2 + 2^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{13}{2}$$

'dır ve 1, $\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$ sayılarının da kareler toplamı

$$1^2 + (\sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2})^2 = 6 + 2\sqrt{2}$$

olduğundan, sonuncu üçlü, $\sqrt{2}$, 2, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ üçlüsünden, problemde sözü geçen işlemler sonucu elde edilemez.

(**Çözenler:** *Ali N. Duman (Ankara), Osman N. Osmanlı (Ankara), Metehan Aydın (Ankara), Yunus Esençayı (Ankara)*).

Y.205. Bir P noktasından geçen S_1, S_2, S_3 çemberleri birbirleriyle ayrıca A, B, C noktalarında kesişiyorlar. Eğer A, B, C noktaları P 'den geçmeyen bir doğrunun üzerinde ise, bu çemberlerin merkezlerinden geçen çemberin P noktasından da geçeceğini ispatlayınız.

Çözüm. Merkezler O_1, O_2, O_3 olsun. P noktasının O_1O_2, O_2O_3, O_3,O_1 doğrularına göre simetriği olan noktalar sırasıyla A, B, C olur. PA, PB, PC 'nin bu doğruları (dik olarak) kestiği noktalar A_1, B_1, C_1 olmak üzere A_1B_1 doğrusu C_1 'den geçer. Dolayısıyla $O_1A_1PC_1$, $A_1O_2B_1P$ ve $B_1PC_1O_3$ dörtgenlerinin her biri, bir kirişler dörtgeni olur. Buradan $O_1O_2PO_3$ 'ün de kirişler dörtgeni olduğu sonucuna varılır.

(**Çözenler:** *Necati Girgin (Denizli), Ali N. Duman (Ankara), Osman N. Osmanlı (Ankara), Yunus Esençayı (Ankara)*).

TEŞEKKÜRLER...

Türkiye'yi Dünya Matematik Olimpiyadında temsil edecek 6 öğrenciden 3'ü; genç matematik dehaları M. Bumin Korkmaz, Alp Şimşek ve Ahmet Çetintaş'a, 211., 212. ve 213.yarışma problemlerini dergimize sundukları için sonsuz teşekkürler eder, matematik çalışmalarında başarılar dileriz.

Matematik Dünyası Yayın Kurulu

AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ

MATEMATİK KLÜBÜ

ANTALYA ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYADI